TD1 Vecteurs – Analyse vectorielle

1. Soit le trièdre orthonormé direct $\left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}, \overrightarrow{Oz}\right)$. Soient $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ les vecteurs unitaires associés.
   Soient $\vec{X} = (0,1,1)$ et $\vec{Y} = (1,0,1)$.
   a) Calculer $\|\vec{X}\|$ et $\|\vec{Y}\|$.
   b) Calculer $\vec{X} \cdot \vec{Y}$.
   c) Calculer l'angle $(\vec{X}, \vec{Y})$.
   d) Calculer $\vec{Z}$ tel que $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ soit ortho-direct.

2. Calculer les vecteurs unitaires des coordonnées polaires $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta$ en fonction des vecteurs unitaires $\vec{u}_x, \vec{u}_y$ des coordonnées catésiennes.
3. Calculer $\dfrac{d\vec{u}_r}{d\theta}, \dfrac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}$.
4. Soit le trièdre orthonormé direct $\left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}, \overrightarrow{Oz}\right)$. Un point M est repéré par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z), cylindriques (r, θ, z) et sphériques (r, θ, φ). Soit un déplacement infinitésimal $\overrightarrow{ds}$ de M. Exprimer la longueur de ce déplacement en fonction :
   a) dx, dy, dz .
   b) $r, dr, d\theta, dz$;
   c) $r, \varphi, dr, d\theta, d\varphi$

5. Construire directement $\vec{Z}$ de l'exercice 1 en utilisant le produit vectoriel.
6. *Double produit vectoriel*. On considère $\vec{X} = (\vec{U} \wedge \vec{V}) \wedge \vec{W}$.
   a) Montrer que $\vec{X}$ est dans le plan $[\vec{U}, \vec{V}]$.
   b) Montrer que $\vec{X} = \alpha\ (\vec{V} \cdot \vec{W})\ \vec{U} + \beta\ (\vec{U} \cdot \vec{W}) \vec{V}$.
   c) Déterminer α et β