5. *Pendule de Foucault*

Soit un pendule simple formé d'un point matériel M de masse m suspendu à un fil inextensible de masse négligeable, de longueur ℓ, fixé en A.

Prenons comme repère terrestre un repère Oxyz, l'axe Oz étant vertical ascendant, le plan xOy étant horizontal. Nous négligerons $\Omega^2\,\overrightarrow{HM}$ devant $\vec{G}_T$ (M) de sorte que $\vec{g} = \vec{G}_T$ (M). Le point matériel est soumis :

– à son poids $m\vec{g}$;

– à la tension du fil $\vec{f}$.

Dans le repère terrestre (T), l'équation fondamentale de la dynamique donne :

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{f} - 2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r.$$

Soit x, y, z les coordonnées de M. Les composantes de $\vec{\Omega}$ étant $(0\ ;\ \Omega\cos\lambda\ ;\ \Omega\sin\lambda)$, la relation vectorielle ci-dessus conduit aux trois équations scalaires :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = f_x - 2m\Omega\,(\dot{z}\cos\lambda - \dot{y}\sin\lambda) \\ m\ddot{y} = f_y - 2m\Omega\,\dot{x}\sin\lambda \\ m\ddot{z} = -mg + f_z + 2m\Omega\,\dot{x}\cos\lambda \end{cases}$$

Soit f le module de $\vec{f}$. On a :

$$(f_x = -f\sin\alpha\cos\varphi\ ;\ f_y = -f\sin\alpha\sin\varphi\ ;\ f_z = f\cos\alpha)$$

Or, en posant $OA = h$, on a :

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{\ell^2 - h^2}}{\ell}\ ;\ \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{\ell^2 - h^2}}\ ;\ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{\ell^2 - h^2}}\ ;\ \cos\alpha = \frac{h}{\ell}$$

Donc :

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\dfrac{f}{m}\dfrac{x}{\ell} - 2\,\Omega\,(\dot{z}\cos\lambda - \dot{y}\sin\lambda) \\[2ex] \ddot{y} = -\dfrac{f}{m}\dfrac{y}{\ell} - 2\Omega\,\dot{x}\sin\lambda \\[2ex] \ddot{z} = -g + \dfrac{f}{m}\dfrac{h}{\ell} + 2\Omega\,\dot{x}\cos\lambda \end{cases}$$

Nous nous limiterons au cas des petits mouvements, le point M restant constamment dans le plan xOy.

Alors : $z = 0$ et $\dot{z} = \ddot{z} = 0$, d'où

$$g = \frac{f}{m}\frac{h}{\ell} + 2\Omega\,\dot{x}\cos\lambda,$$

et compte tenu de l'hypothèse $h \approx \ell$:

$$g = \frac{f}{m} + 2\Omega\,\dot{x}\cos\lambda.$$

…

Le terme $2\Omega\,\dot{x}\cos\lambda$ est négligeable devant g de sorte que $f \approx mg$.

En reportant dans les deux autres équations différentielles et en rappelant que $\dot{z}=0$ il vient :

$$\begin{cases} \ddot{x} = -g\,\dfrac{x}{\ell} + 2\Omega\dot{y}\sin\lambda \\[2ex] \ddot{y} = -g\,\dfrac{y}{\ell} - 2\Omega\,\dot{x}\sin\lambda \end{cases}$$

Posons $Z = x + jy$ ($j^2 = -1$). Il vient :

$$\ddot{Z} = -\frac{g}{\ell}\,Z - 2\Omega\,j\dot{Z}\sin\lambda,$$

soit en posant $\omega^2 = \dfrac{g}{\ell}$, $\Omega' = \Omega\sin\lambda$:

$$\ddot{Z} + j2\Omega'\,\dot{Z} + \omega^2 Z = 0.$$

Le discriminant réduit $\Delta' = -\Omega'^2 - \omega^2$ de l'équation caractéristique est négatif et pratiquement égal à $(j\omega)^2$ car Ω'^2 est négligeable devant ω^2, d'où :

$$Z = e^{-j\Omega' t}\,(a\cos\omega t + jb\sin\omega t).$$

Posons $Z' = a\cos\omega t + jb\sin\omega t$ et $Z = e^{-j\Omega' t}Z'$.

$$Z = e^{-j\Omega' t}\,(a\cos\omega t + jb\sin\omega t).$$

Posons $Z' = a\cos\omega t + jb\sin\omega t$ et $Z = e^{-j\Omega' t} Z'$.

Considérons alors les axes Ox', Oy' tournant autour de O dans le plan xOy avec la vitesse angulaire $-\Omega'$ (fig. 4).

Rapportée aux axes Ox', Oy' la trajectoire de M est une ellipse puisque :

$$\begin{cases} x' = a\cos\omega t \\ y' = b\sin\omega t \end{cases}$$

Le plan de cette ellipse tourne donc avec une vitesse angulaire $-\Omega'$. Le plan fait un tour complet au bout d'un temps T′ tel que :

$$T' = \frac{2\pi}{\Omega'} = \frac{2\pi}{\Omega\sin\lambda} = \frac{T_0}{\sin\lambda},$$

T_0 étant le temps sidéral de révolution de la Terre.

La rotation se fait dans le sens direct dans l'hémisphère Sud et dans le sens inverse dans l'hémisphère Nord (fig. 5).

Ce phénomène a été étudié par Foucault au moyen d'un pendule accroché au dôme du Panthéon (67 m).

$$Z = e^{-j\Omega' t}\,(a\cos\omega t + jb\sin\omega t).$$

Posons $Z' = a\cos\omega t + jb\sin\omega t$ et $Z = e^{-j\Omega' t} Z'$.

Considérons alors les axes Ox', Oy' tournant autour de O dans le plan xOy avec la vitesse angulaire $-\Omega'$ (fig. 4).

Rapportée aux axes Ox', Oy' la trajectoire de M est une ellipse puisque :

$$\begin{cases} x' = a\cos\omega t \\ y' = b\sin\omega t \end{cases}$$

Le plan de cette ellipse tourne donc avec une vitesse angulaire $-\Omega'$. Le plan fait un tour complet au bout d'un temps T′ tel que :

$$T' = \frac{2\pi}{\Omega'} = \frac{2\pi}{\Omega\sin\lambda} = \frac{T_0}{\sin\lambda},$$

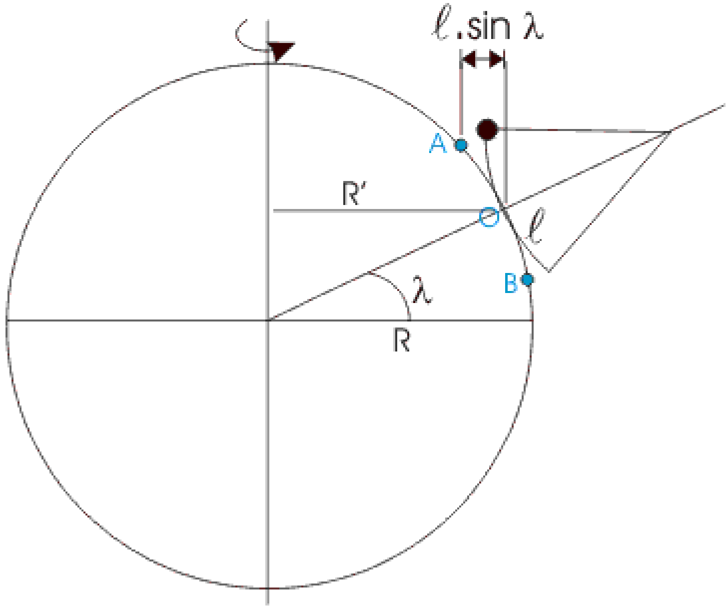
T_0 étant le temps sidéral de révolution de la Terre.

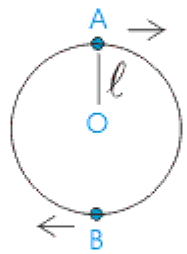
La rotation se fait dans le sens direct dans l'hémisphère Sud et dans le sens inverse dans l'hémisphère Nord (fig. 5).

Ce phénomène a été étudié par Foucault au moyen d'un pendule accroché au dôme du Panthéon (67 m).

Les résultats expérimentaux ont confirmé l'étude théorique que l'on vient de faire. On a là une preuve directe de la rotation de la Terre.

Pendule de Foucault : Théorie rapide





Plaçons nous à une latitude λ. Le schéma de gauche montre la Terre de côté, le pendule est lâché initialement sur une direction Nord-Sud. Le schéma de droite montre le pendule vu d'au-dessus de sa position d'équilibre. Les points A, O et B sont des points de la surface terrestre, séparés par la distance l,

qui correspond à l'écart maximum du pendule au sol.

Quand la masse est en équilibre en O, elle se déplace autour de l'axe de rotation terrestre à la vitesse:

$$v_0 = R'\Omega$$

(où Ω est la vitesse angulaire de rotation de la Terre sur son axe / étoiles).
O a une vitesse plus grande que A, elle est augmentée de

$$\Omega l \sin\lambda$$

car O est plus loin de l'axe que A. Donc, quand la masse arrive en A, elle possède une vitesse "vers la droite" plus grande que A de cette valeur.
O a une vitesse plus petite que B, elle est diminuée de

$$\Omega l \sin\lambda$$

car O est plus près de l'axe que B. Donc, quand la masse arrive en B, elle possède une vitesse "vers la gauche" par rapport à B, qui a cette valeur.
Ceci implique que par rapport au sol, dans l'hémisphère Nord, le plan d'oscillation tourne dans le sens des aiguilles d'une montre, et comme

$$\Omega l \sin\lambda = l\,\omega$$

où ω est la vitesse angulaire de rotation de ce plan, on a :

$$\omega = \Omega \sin\lambda$$