LICENCE
3$^{\text{ème}}$ Année

INTEGRATION ET ANALYSE DE FOURIER

(S. Weinryb — P. Calka - F. Comte)

EXAMEN PARTIEL. Mercredi 16 ou 23 Novembre 2005. Durée 1h30.
Documents et calculatrices interdits.

Question de cours.
Quelle est, à une constante multiplicative près, l'unique mesure invariante par translation sur les boréliens de $\mathbb{R}$? Le démontrer.

Correction : l'unique mesure invariante par translation sur $\mathbb{R}$ est, à constante multiplicative près, la mesure de Lebesgue.

Montrons tout d'abord que la mesure de Lebesgue μ_l est invariante par translation. Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, on note ν la mesure sur les boréliens de $\mathbb{R}$ définie par $\nu(A) = \mu_l(A + x)$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. En particulier, si $A = [a, b]$, $a \leq b$, $\nu([a, b]) = (b + x) - (a + x) = b - a$. Par unicité de la mesure de Lebesgue, on en déduit que $\nu = \mu_l$, c'est-à-dire que μ_l est invariante par translation.

Réciproquement, on considère une mesure μ sur les boréliens de $\mathbb{R}$ invariante par translation.

- Si $\mu([0, 1[) = 0$: pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mu([-n, n[) = \mu([-n, -(n-1)[) + \mu([-(n-1), -(n-2)[) + \cdots + \mu([(n-1), n[) = 2n\mu([0, 1[) = 0.$$

Par conséquent, comme $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n[$, l'union étant croissante,

$$\mu(\mathbb{R}) = \lim_{n \to +\infty} \mu([-n, n[) = 0.$$

Autrement dit, μ est la mesure nulle.

- si $\mu([0, 1[) = \lambda > 0$: quitte à diviser μ par λ, on peut supposer que $\mu([0, 1[) = 1$. En particulier, si $q \in \mathbb{N}^*$ fixé,

$$\mu([0, 1[) = \mu\left(\left[0, \frac{1}{q}\right[\right) + \mu\left(\left[\frac{1}{q}, \frac{2}{q}\right[\right) + \cdots + \mu\left(\left[\frac{q-1}{q}, 1\right[\right) = q\mu\left(\left[0, \frac{1}{q}\right[\right).$$

Par invariance par translation, on obtient que $\mu\left(\left[0,\frac{1}{q}\right[\right)=\frac{1}{q}$ et pour tout $p\in\mathbb{N}$,

$$\mu\left(\left[0,\frac{p}{q}\right[\right)=\frac{p}{q}.$$

On considère $a\in\mathbb{R}_+$ et une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de rationnels positifs croissant vers a. Comme $[0,a[=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[0,r_n[$, l'union étant croissante, on déduit de l'égalité précédente que

$$\mu([0,a[)=\lim_{n\to+\infty}\mu([0,r_n[)=\lim_{n\to+\infty}r_n=a.$$

Enfin, si $a<b$, l'invariance par translation et l'égalité précédente nous donnent

$$\mu([a,b[)=\mu([0,(b-a)[)=(b-a).$$

Cette égalité caractérise la mesure de Lebesgue donc μ est la mesure de Lebesgue μ_l.

_ Si $\mu([0,1[)=+\infty$: par la méthode de découpage précédente, on obtient que $\mu([0,\frac{1}{q}[)=+\infty$ pour tout $q\in\mathbb{N}^*$. Ceci signifie que μ est la mesure qui vaut $+\infty$ pour tout borélien non vide.

Exercice 1. On note $\mathcal{B}$ la tribu borélienne de $\mathbb{R}$, $\mathcal{B}_+=\{B\ :\ B\in\mathcal{B},B\subset\mathbb{R}_+\}$ et $\mathcal{F}=\{A\ :\ A\subset\mathbb{R}_+\}\cup\{A\ :\ A^c\subset\mathbb{R}_+\}$ où A^c désigne le complémentaire de A.
1) Montrer que $\mathcal{F}$ est une tribu.

Correction :
_ $\emptyset\in\mathcal{F}$: en effet, $\emptyset\subset\mathbb{R}_+$. De la même manière, on peut montrer que $\mathbb{R}\in\mathcal{F}$ car $\mathbb{R}^c=\emptyset\subset\mathbb{R}_+$.
_ On considère $A\in\mathcal{F}$. Montrons que $A^c\in\mathcal{F}$: soit $A\subset\mathbb{R}_+$ et dans ce cas, $(A^c)^c=A\subset\mathbb{R}_+$ donc $A^c\in\mathcal{F}$. Soit $A^c\subset\mathbb{R}_+$ et dans ce cas, il est clair que $A^c\in\mathcal{F}$.
_ On considère une suite d'ensembles $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $A_n\in\mathcal{F}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Montrons que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\in\mathcal{F}$: deux cas sont possibles. Soit $A_n\subset\mathbb{R}_+$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et on a alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\subset\mathbb{R}_+$ donc $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\in\mathcal{F}$. Soit l'un des A_n est tel que son complémentaire est inclus dans $\mathbb{R}_+$. Supposons par exemple qu'il s'agit de A_0 : dans ce cas,

$$\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\right)^c=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_n^c\subset A_0^c\subset\mathbb{R}_+$$

donc $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\in\mathcal{F}$.

2) Montrer que $\mathcal{B}_+$ n'est pas une tribu.

Correction :
$\mathbb{R}$ n'est pas dans $\mathcal{B}_+$ donc $\mathcal{B}_+$ ne peut pas être une tribu.

Exercice 2. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonction de $(X, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Montrer que $g = \sup_{n\geq 1} f_n$ est mesurable.

Correction :
il suffit de montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $\{x \in \mathbb{R}; g(x) \leq a\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Il suffit pour cela de remarquer que

$$\{x \in \mathbb{R}; g(x) \leq a\} = \bigcap_{n\geq 1} \{x \in \mathbb{R}; f_n(x) \leq a\}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, f_n est mesurable donc $\{x \in \mathbb{R}; f_n(x) \leq a\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Par conséquent, une tribu étant stable par intersection dénombrable, $\{x \in \mathbb{R}; g(x) \leq a\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ borélienne positive.
1) On pose pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$, $g_n(x) := \sqrt{\frac{n}{n+x}}\mathbb{1}_{[0,n]}(x)$. Montrer que la suite g_n, $n \geq 1$ est croissante et que $\lim_{n\to+\infty} g_n = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$.

Correction :
pour tout $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}_+$, on a

$$g_n(x) = \sqrt{\frac{1}{1+\frac{x}{n}}} \leq \sqrt{\frac{1}{1+\frac{x}{n+1}}} = g_{n+1}(x).$$

Donc la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x}{n} = 0$ donc pour tout $x \geq 0$, $(g_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 1.
2) Calculer, si elle existe, la quantité $\lim\limits_{n\to+\infty} n \displaystyle\int_0^1 \frac{f(nt)}{\sqrt{1+t}}dt$.

Correction :
on fait tout d'abord le changement de variable $u = nt$ dans l'intégrale :

$$n\int_0^1 \frac{f(nt)}{\sqrt{1+t}}dt = \int_0^n \frac{f(u)}{\sqrt{1+\frac{u}{n}}}du = \int_0^{+\infty} f(u)g_n(u)\mathbf{1}_{[0,n]}(u)du.$$

La suite de fonctions mesurables $(fg_n\mathbf{1}_{[0,n]})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction $f\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}$ et est croissante positive d'après la 1ère question. Par conséquent, on peut appliquer le théorème de Beppo-Levi :

$$\lim_{n\to+\infty} n\int_0^1 \frac{f(nt)}{\sqrt{1+t}}dt = \int_0^{+\infty} f(u)du.$$

Exercice 4. On considère les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)^2 \text{ et } g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}dt.$$

1) Montrer que f et g sont définies et continues sur $\mathbb{R}_+$.
2) Montrer que f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}_+$ et calculer leurs dérivées (on pourra montrer la dérivabilité de g sur tout intervalle $[0, A]$, où $A > 0$).

Correction :
la fonction f est bien définie car la fonction $t \longmapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc intégrable sur tout intervalle $[0, x]$, $x > 0$.

La fonction $x \longmapsto \int_0^x e^{-t^2}dt$ est la primitive sur $\mathbb{R}_+$ s'annulant en zéro de la fonction $t \longmapsto e^{-t^2}$ qui est de classse $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$. Par conséquent, elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et donc f également. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$f'(x) = 2\left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)' \int_0^x e^{-t^2}dt = 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt.$$

La fonction g est bien définie car à x fixé, $t \longmapsto \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ est continue donc intégrable sur l'intervalle $[0, 1]$.

De plus, on note $h(x,t) = \dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$, $x, t \geq 0$. Pour tout $t \in [0,1]$, la fonction $x \longmapsto h(x,t) = \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ est continue et on a la domination suivante :

$$\left|\frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\right| \leq \frac{1}{1+t^2},$$

l'intégrale $\int_0^1 (1/(1+t^2))dt$ étant finie.

Par conséquent, par le théorème de continuité sous le signe intégral de Lebesgue, la fonction g est continue.

On procède de même pour la dérivée : pour tout $t \in [0,1]$, la fonction $x \longmapsto h(x,t) = \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = -2xe^{-x^2(1+t^2)}.$$

La domination est difficile à établir sur tout $\mathbb{R}_+$ directement. On le fait pour tout $x \in [0, A]$ avec $A > 0$ fixé : si $x \in [0, A]$, $t \geq 0$,

$$|-2xe^{-x^2(1+t^2)}| \leq 2A,$$

Puisque la fonction constante égale à $2A$ est bien intégrable entre 0 et 1, on obtient par le théorème de dérivation sous le signe intégral de Lebesgue que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, A]$ et on peut dériver sous le signe intégral. Ceci étant vrai pour tout $A > 0$, g est en fait de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ tout entier. De plus, pour tout $x \geq 0$,

$$g'(x) = \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)dt = -2x\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}dt = -2e^{-x^2}\int_0^1 e^{-x^2t^2}xdt = -2e^{-x^2}\int_0^x e^{-u^2}du,$$

en faisant le changement de variable $u = xt$ dans la dernière intégrale.
3) En déduire que $f(x) + g(x) = \frac{\pi}{4}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

Correction :
on remarque que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) = -g'(x)$ ce qui signifie que la fonction $(f + g)$ est de dérivée nulle, donc est constante sur $\mathbb{R}_+$. Il reste à déterminer cette constante : pour $x = 0$, on a $f(0) = 0$ et $g(0) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt = [\arctan(t)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$.
4) Déterminer la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ (on pourra faire tendre x vers l'infini dans l'égalité précédente).

Correction :
tout d'abord, cette intégrale existe bien car $t \longmapsto e^{-t^2}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ donc localement intégrable sur $\mathbb{R}_+$. De plus, lorsque t tend vers l'infini, par croissances comparées, $0 \leq e^{-t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ est une intégrale de Riemann convergente donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t^2}dt$ converge.
Notons I la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$.

En particulier, f tend vers I^2 lorsque x tend vers l'infini. De plus, pour tous $t \in [0, 1]$ et $x \in \mathbb{R}_+$, $e^{-x^2t^2}/(1 + t^2) \leq 1$ donc

$$0 \leq g(x) = e^{-x^2} \int_0^1 \frac{e^{-x^2t^2}}{1+t^2}dt \leq e^{-x^2} \int_0^1 dt = e^{-x^2}.$$

Ceci implique que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$. En conclusion, en utilisant la question précédente, on a

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) + g(x) = I^2 + 0 = \frac{\pi}{4},$$

donc $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.