Université Paris 5
UFR Mathématiques-Informatique
Année 2006-2007

Analyse 3. Notes de cours

Licence 2ème année

P. Calka

Bibliographie

Les mathématiques en licence 1ère année, Tome 1, E. Azoulay, J. Avignant & G. Auliac, EDISCIENCES

Mathématiques MPSI, problèmes corrigés : nouveau programme, W. Damin, ELLIPSES

Mathématiques 1ère année, C. Deschamps & A. Warusfel, J'intègre "Tout en un", DUNOD

Mathématiques pour l'étudiant scientifique Tome 1, P.-J. Haug, EDP Sciences

Exercices résolus d'analyse, J. Lelong-Ferrand, DUNOD Université

Analyse 1ère année, F. Liret & D. Martinais, DUNOD

Analyse 1ère année MPSI, J.-M. Monier, DUNOD

Mathématiques Deug Sciences 1ère année, H. Muller, BREAL

Chemins vers l'analyse Tome 1, F. Pecastaings & J. Sevin, VUIBERT

Mathématiques pour le Deug, Analyse 1ère année, D. Prochasson, DUNOD

Table des matières

1 Propriété de la borne supérieure sur $\mathbb{R}$ 5

1.1 Borne supérieure, borne inférieure 5

1.2 Propriété de la borne supérieure sur $\mathbb{R}$ 7

1.3 Application : intervalles de $\mathbb{R}$ 8

2 Suites de nombres réels ou complexes 11

2.1 Limite d'une suite 11

2.1.1 Définitions 11

2.1.2 Propriétés des limites 13

2.1.3 Suites monotones 15

2.1.4 Suites complexes 16

2.2 Suites équivalentes. Notations de Landau 17

2.2.1 Définitions 17

2.2.2 Propriétés de calculs 18

2.2.3 Détermination de limites 19

2.3 Sous-suites. Valeurs d'adhérence 20

2.3.1 Définitions 20

2.3.2 Théorème de Bolzano-Weierstrass 22

3 Séries à terme général réel ou complexe 25

3.1 Définition et exemples 25

3.2 Séries à terme général positif 26

3.3 Séries à terme général quelconque 28

4 Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles. Continuité 31

4.1 Limites d'une fonction 32

4.1.1 Définitions et critère séquentiel 32

4.1.2 Fonctions monotones 35

4.1.3 Fonctions équivalentes. Notations de Landau 35

4.2 Continuité 37

4.2.1 Continuité locale, globale 37

4.2.2 Théorème des valeurs intermédiaires 38

4.2.3 Fonctions continues sur un segment 39

4.3 Uniforme continuité 40
4.3.1 Définition et théorème de Heine 40
4.3.2 Fonctions lipschitziennes 42

5 Dérivation et formules de Taylor **45**
5.1 Définition et propriétés 45
5.1.1 Dérivée en un point, fonction dérivée 45
5.1.2 Opérations sur les dérivées 47
5.2 Accroissements finis 49
5.2.1 Théorème de Rolle 49
5.2.2 Formule des accroissements finis 50
5.2.3 Applications des accroissements finis 51
5.3 Formules de Taylor 53
5.3.1 Formule de Taylor-Young 53
5.3.2 Formule de Taylor-Lagrange 54
5.3.3 Formule de Taylor avec reste intégral 54
5.3.4 Applications des formules de Taylor 55

6 Etude de courbes paramétrées du plan **57**
6.1 Symétries, classe de la courbe, variations 57
6.2 Tangentes, points de rebroussements 58
6.3 Branches infinies 61

Annexe 1 : développements limités classiques **63**

Annexe 2 : utilisation de la notion de convexité **65**

Annexe 3 : compléments sur la topologie de $\mathbb{R}$ **69**

Chapitre 1

Propriété de la borne supérieure sur $\mathbb{R}$

On munit $\mathbb{R}$ de la relation d'ordre classique $\leq$ vérifiant les trois propriétés :

(1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \leq x$ (réflexivité) ;

(2) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $\left.\begin{array}{c} x \leq y \\ y \leq x \end{array}\right\} \Longrightarrow x = y$ (antisymétrie) ;

(3) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, $\left.\begin{array}{c} x \leq y \\ y \leq z \end{array}\right\} \Longrightarrow x \leq z$ (transitivité).

1.1 Borne supérieure, borne inférieure

Définition 1.1 (majorant, minorant) *Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et M (resp. m) un nombre réel. M (resp. m) est dit* majorant *(resp.* minorant*) de A si $\forall x \in A$, $x \leq M$ (resp. $x \geq m$).*

Exemple 1. L'ensemble $A = \left\{ \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}; n \in \mathbb{N} \right\}$ est majoré par 3.

En effet, $\sum_{k=0}^{0} \frac{1}{k!} = 1$ et $\sum_{k=0}^{1} \frac{1}{k!} = 2$ sont majorés par 3 et pour tout $n \geq 2$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} &= \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \\
&\leq 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} \\
&= 2 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \\
&= 2 + 1 - \frac{1}{n} \leq 3.
\end{aligned}$$

Remarquons qu'en fait, la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et converge vers $e \approx 2,718$.

Exemple 2. L'ensemble $A = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}; n \in \mathbb{N} \right\}$ n'est pas majoré. En effet, en utilisant l'inégalité

$\ln(1+x) \leq x$ pour tout $x > -1$ (que l'on peut justifier par étude de fonction), on a pour tout $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n}(\ln(k+1)-\ln(k)) = \ln(n+1)-\ln(1) = \ln(n+1).$$

Remarquons que l'on pourrait aussi utiliser l'argument suivant : la série de terme général $\frac{1}{k}$ est à terme général positif et divergente donc ses sommes partielles sont non majorées.

Définition 1.2 (maximum, minimum) *Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et M (resp. m) un nombre réel. M (resp. m) est dit* maximum *ou* plus grand élément *(resp.* minimum *ou* plus petit élément*) de A si $M \in A$ et M est un majorant (resp. minorant) de A.*

Proposition 1.3 (unicité du maximum) *Si A possède un maximum (resp. minimum), alors il est unique et on le note* $\max(A)$ *(resp.* $\min(A)$*).*

Preuve. Soient M et M' deux réels qui sont maximums d'un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$. Alors comme M est majorant de A et que M' est élément de A, on a

$$M' \leq M.$$

De même, comme M' est majorant de A et que M est élément de A, on a aussi

$$M \leq M'.$$

Par la propriété d'antisymétrie de $\leq$, on obtient que $M = M'$.□

Proposition 1.4 *Tout ensemble fini non vide possède un maximum (resp. minimum).*

Preuve. Soit A un ensemble à n éléments, $n \in \mathbb{N}^*$. Nous allons montrer que A possède un maximum par récurrence sur n.
•$n = 1$: dans ce cas, A est un singleton $\{x\}$ et x est le maximum de A ;
•$n > 1$: supposons le résultat acquis au rang $(n-1)$ et montrons-le au rang n. on fixe un élément x de A et on considère l'ensemble $B = A \setminus \{x\}$. B est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ à $(n-1)$ éléments donc possède un maximum $M \in A \setminus \{x\}$. Si $x \leq M$, alors M est aussi le maximum de A et si $M \leq x$, alors x est le maximum de A car il majore un majorant de $A \setminus \{x\}$ donc est lui-même un majorant de A.□
Exemple 1. Soient $n \geq 1$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients complexes). L'ensemble $A = \{\ |\lambda|\ ;\ \lambda$ valeur propre de $M\}$ possède un plus grand élément car il est de cardinal fini, inférieur à n (on appelle ce maximum le rayon spectral de M).
Exemple 2. L'ensemble $A = \{x(1-x); 0 \leq x \leq 1\}$ possède un maximum. Il est réalisé pour $x = 1/2$ et vaut $1/4$.
Exemple 3. L'ensemble $A = \{\arctan(1/x); x > 0\}$ n'a pas de maximum. La fonction $x \longmapsto \arctan(1/x)$ est décroissante donc majorée par $\lim_{x\to 0^+} \arctan(1/x) = \frac{\pi}{2}$ mais la valeur $\pi/2$ n'est jamais atteinte.

Définition 1.5 (bornes supérieure, inférieure) *Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{M}(A)$ l'ensemble des majorants (resp. minorants) de A. Si $\mathcal{M}(A)$ possède un minimum (resp. maximum), alors on appelle ce réel la* borne supérieure *(resp.* inférieure*) de A et on le note* $\sup(A)$ *(resp.* $\inf(A)$*).*

Remarque. Si $\max(A)$ existe, alors $\sup(A) = \max(A)$.
Exemple. Comme on vient de le voir, l'ensemble $A = \{\arctan(1/x); 0 < x \leq 1\}$ est majoré par $\pi/2$. De plus, $\pi/2$ est le plus petit des majorants. En effet, considérons un nombre $r < \pi/2$ et notons $\varepsilon = \pi/2 - r$. Alors pour $x = \left[\tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right)\right]^{-1}$, on a

$$\arctan(1/x) = \frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2} > \frac{\pi}{2} - \varepsilon = r.$$

Par conséquent, r ne majore pas A. Ainsi, $\pi/2$ est le plus petit des majorants donc $\sup(A) = \pi/2$.

1.2 Propriété de la borne supérieure sur $\mathbb{R}$

Théorème 1.6 (admis) *Tout ensemble non vide et majoré (resp. minoré) possède une borne supérieure (resp. inférieure).*

Exemple. On se place dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct (O, I, J). On note $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1 et pour tout $n \geq 3$, P_n le polygone régulier à n côtés inscrit dans $\mathcal{C}$ et dont 1 est l'un des sommets. On considère l'ensemble $A = \{\text{Aire}(P_n); n \geq 3\}$.
A est non vide et majoré par l'aire du carré de sommets de coordonnées $(-1, -1)$, $(-1, 1)$ $(1, 1)$ et $(1, -1)$, c'est-à-dire 4. Par conséquent, A possède une borne supérieure : il s'agit du nombre π.
(Remarquons qu'on peut calculer l'aire de P_n en coupant le polygone en n triangles isocèles : on obtient Aire(P_n)= $(n/2)\sin(2\pi/n)$ et ceci tend vers π quand n tend vers l'infini.)

Proposition 1.7 (caractérisation de la borne supérieure) *Soient A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ non vide et majoré et r un réel fixé. Alors*

$$r = \sup(A) \iff \begin{cases} \forall x \in A, x \leq r \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A; r - \varepsilon < x \leq r \end{cases}$$

Preuve. La première assertion dans l'accolade est une réécriture mathématique de "r majore A" tandis que la seconde est une réécriture de "aucun nombre inférieur strictement à r ne majore A".□
Remarque. On pourrait de même montrer que

$$r = \inf(A) \iff \begin{cases} \forall x \in A, r \leq x \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A; r \leq x < r + \varepsilon \end{cases}$$

Exemple. On considère l'ensemble $A = \{(1 - e^{-x})\sin(x); x \geq 0\}$. Montrons que $\sup(A) = 1$ (et on pourrait montrer de même que $\inf(A) = -1$) :
• Pour tout $x \geq 0$, $(1 - e^{-x})\sin(x) \leq 1$;

• Soit $\varepsilon > 0$. Montrons l'existence de $x \geq 0$ tel que $(1-e^{-x})\sin(x) > 1-\varepsilon$: on prend x de la forme $\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k \in \mathbb{N}$ de telle manière que $\sin(x)=1$. Il suffit donc de trouver un k entier vérifiant l'inégalité

$$\begin{aligned} 1-\exp(-\frac{\pi}{2}-2k\pi) > 1-\varepsilon \iff & \frac{\pi}{2}+2k\pi > \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \\ \iff & k \geq E\left(\frac{1}{\pi}\left(\ln(1/\varepsilon)-\frac{\pi}{2}\right)\right)+1, \end{aligned}$$

où $E(\cdot)$ désigne la partie entière sur $\mathbb{R}$.

En prenant k ainsi, on obtient l'inégalité voulue $(1-e^{-x})\sin(x) > 1-\varepsilon$. En conclusion, $\sup(A)=1$.

1.3 Application : intervalles de $\mathbb{R}$

Définition 1.8 (intervalle) *Soit I un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On dit que I est un* intervalle *de $\mathbb{R}$ si pour tous $x,y,z \in \mathbb{R}$ tels que $x<y<z$ on a : $x,z \in I \Longrightarrow y \in I$.*

Théorème 1.9 (classification des intervalles) *Soit I un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. I est un intervalle de $\mathbb{R}$ si et seulement si il est de l'un des dix types suivants :*

1. $\emptyset$;
2. $\mathbb{R}$;
3. $[a,b] := \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$, $a \leq b \in \mathbb{R}$;
4. $[a,b[:= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$, $a < b \in \mathbb{R}$;
5. $]a,b] := \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$, $a < b \in \mathbb{R}$;
6. $]a,b[:= \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$, $a < b \in \mathbb{R}$;
7. $]-\infty,b] := \{x \in \mathbb{R}; x \leq b\}$, $b \in \mathbb{R}$;
8. $]-\infty,b[:= \{x \in \mathbb{R}; x < b\}$, $b \in \mathbb{R}$;
9. $[a,+\infty[:= \{x \in \mathbb{R}; x \geq a\}$, $a \in \mathbb{R}$;
10. $]a,+\infty[:= \{x \in \mathbb{R}; x > a\}$, $a \in \mathbb{R}$.

Preuve. 1er cas : $I=\emptyset$.
I est alors du premier type.
2ème cas : $I \neq \emptyset$ et I n'est ni majoré ni minoré.
Montrons que $I=\mathbb{R}$: soit $x \in \mathbb{R}$. Comme x ne majore pas I, il existe $b \in I$ tel que $x<b$ et de même, comme x ne minore pas I, il existe $a \in I$ tel que $x>a$. Par conséquent, $a<x<b$ et $a,b \in I$ donc d'après la définition d'un intervalle , $x \in I$.
En conclusion, $I=\mathbb{R}$.
3ème cas : $I \neq \emptyset$ et I est majoré et minoré.
Soient $a=\inf(I)$ et $b=\sup(I)$. Comme a minore I et b majore I, on a $I \subset [a,b]$.
Montrons que $]a,b[\subset I$: soit $x \in]a,b[$. Comme $x<b$, d'après la proposition 1.7, il existe $b' \in I$ tel que $x<b'<b$. De même, il existe $a' \in I$ tel que $a<a'<x$. Par conséquent, $a'<x<b'$ et $a',b' \in I$ donc d'après la définition d'un intervalle, $x \in I$.
En conclusion, $]a,b[\subset I \subset [a,b]$. I est donc de l'un des quatre types 3, 4, 5 ou 6 suivant que $\sup(I)$ et $\inf(I)$ sont ou non des éléments de I.
4ème cas : $I \neq \emptyset$ et I est majoré mais pas minoré.
Soit $b=\sup(I)$. Comme b majore I, on a $I \subset]-\infty,b]$.
Montrons que $]-\infty,b[\subset I$: soit $x \in]-\infty,b[$. Comme $x<b$, d'après la proposition 1.7, il existe $b' \in I$ tel que $x<b'<b$. De plus, x ne minore pas I donc il existe $a \in I$ tel que $a<x$. Par

conséquent, $a < x < b'$ et $a, b' \in I$ donc d'après la définition d'un intervalle, $x \in I$.
En conclusion, $]-\infty, b[\subset I \subset]-\infty, b]$. I est donc de l'un des deux types 7 ou 8 suivant que $\sup(I)$ est ou non élément de I.
5ème cas : $I \neq \emptyset$ et I est minoré mais pas majoré.
Par des méthodes analogues, on montre que I est du type 9 ou 10 suivant que $\inf(I)$ appartient ou non à I.$\square$
Remarques. Pour tous $a < b$,

$$\sup([a, b]) = \sup([a, b[) = \sup(]-\infty, b]) = \sup(]-\infty, b[) = b$$

et de même,

$$\inf([a, b]) = \inf(]a, b[) = \inf([a, +\infty[) = \inf(]a, +\infty[) = a.$$

Par convention, on pose $\sup(\emptyset) = -\infty$ et $\inf(\emptyset) = +\infty$.

Chapitre 2

Suites de nombres réels ou complexes

Soit E un ensemble non vide (en général $E = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Une suite d'éléments de E est une application $u : \mathbb{N} \longrightarrow E$. En général, lorsque n est un entier naturel fixé, on note u_n (au lieu de $u(n)$) l'image de n par u. On note $E^{\mathbb{N}}$ (resp. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$) l'ensemble des suites à valeurs dans E (resp. $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$).

2.1 Limite d'une suite

2.1.1 Définitions

Définition 2.1 (limite d'une suite) *(1) Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels (resp. complexes) et $l \in \mathbb{R}$ (resp $\mathbb{C}$). On dit que u a pour* limite *l si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \geq N, |u_n - l| < \varepsilon.$$

(2) Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On dit que u a pour limite $+\infty$ *si*

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \geq N, u_n > A.$$

On dit que u a pour limite $-\infty$ *si*

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \geq N, u_n < -A.$$

Définition 2.2 (suite convergente) *Une suite est dite* convergente *si elle a pour limite un nombre fini. Dans le cas contraire, on dit qu'elle est* divergente.

Exemple 1. On considère une suite u stationnaire, c'est-à-dire telle qu'il existe un certain rang $N_0 \in \mathbb{N}$ et un nombre (réel ou complexe) c tels que pour tout $n \geq N_0$, $u_n = c$. Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} c = c$:
soit $\boldsymbol{\varepsilon > 0}$ et posons $N = N_0$. Alors **pour tout** $\mathbf{n} \geq N$, on a

$$|\mathbf{u_n} - \mathbf{c}| = |c - c| = 0 < \varepsilon.$$

On a bien fait apparaître en gras la définition de la limite de u, c'est-à-dire qu'on vient de montrer que u a pour limite c.

Exemple 2. On considère $u_n = 1/n$ pour tout $n \geq 1$. Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$:
soit $\varepsilon > \mathbf{0}$**.** Posons $N = E(1/\varepsilon) + 1$ où $E(\cdot)$ désigne la partie entière. Alors **pour tout** $\mathbf{n} \geq N$, on a

$$|\mathbf{u_n} - \mathbf{0}| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Exemple 3. On considère $u_n = n^2$, $n \geq 0$. Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$:
soit $\mathbf{A} > \mathbf{0}$**.** Posons $N = E(\sqrt{A}) + 1$. Alors **pour tout** $\mathbf{n} \geq \mathbf{N}$, on a

$$\mathbf{u_n} \geq N^2 > (\sqrt{A})^2 = \mathbf{A}.$$

Exemple 4. On considère $u_n = \exp(-n^2 + n)$ pour tout $n \geq 0$. Montrons que
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \exp(-n^2 + n) = 0$:
soit $\varepsilon > \mathbf{0}$**.** Si $\varepsilon > 1$, posons $N = 0$. Alors **pour tout** $\mathbf{n} \geq \mathbf{N}$**,** on a

$$|\mathbf{exp}(-\mathbf{n^2} + \mathbf{n}) - \mathbf{0}| \leq 1 < \varepsilon.$$

Si $\varepsilon \leq 1$, posons $N = \max\left(E\left(\sqrt{-2\ln(\varepsilon)}\right) + 1, 2\right)$. Lorsque $\mathbf{n} \geq \mathbf{N}$**,** on a $n \geq 2$ donc $n^2 - n \geq n^2/2$. Par conséquent, il vient que

$$|\mathbf{exp}(-(\mathbf{n^2} - \mathbf{n})) - \mathbf{0}| \leq \exp(-n^2/2) \leq \exp(-N^2/2) < \exp\left(-\left[\sqrt{-2\ln(\varepsilon)}\right]^2/2\right) = \varepsilon.$$

Proposition 2.3 (unicité de la limite) *Soit u une suite réelle ou complexe. Si la limite de u existe, elle est unique.*

Preuve. Supposons par l'absurde que u a deux limites l et l' où l et l' sont deux réels distincts. On choisit alors $\varepsilon = |l - l'|/3$ et on prend N et N' les entiers tels que pour tout $n \geq N$, $|u_n - l| < \varepsilon$ et pour tout $n \geq N'$, $|u_n - l'| < \varepsilon$.

Alors pour $n = \max(N, N')$, les deux inégalités ci-dessus sont vérifiées et on obtient par inégalité triangulaire que

$$0 < |l - l'| \leq |l - u_n| + |u_n - l'| < 2\varepsilon = \frac{2}{3}|l - l'|,$$

ce qui est absurde.

Il reste à vérifier qu'il est aussi impossible d'avoir une suite réelle u convergeant vers un infini ($+\infty$ par exemple) et vers un réel l. En effet, supposons par l'absurde l'existence d'une telle suite. Pour $A = |l| + 2$ et $\varepsilon = 1$, on prend $N > 0$ tel que pour tout $n \geq N$, $u_n > A$ et N' tel que pour tout $n \geq N'$, $|u_n - l| < \varepsilon$.

Dans ce cas, si $n = \max(N, N')$, on obtient que

$$|l| + 2 < u_n \leq |u_n| \leq |u_n - l| + |l| < 1 + |l|,$$

ce qui est absurde.□

2.1.2 Propriétés des limites

Proposition 2.4 (opérations et limites) *(1) Soient u et v deux suites réelles possédant des limites. La limite de $(u_n + v_n)$ est alors donnée par le tableau ci-dessous :*

$\lim v_n$ \ $\lim u_n$	$l \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$l' \in \mathbb{R}$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?
$-\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$

La limite de $u_n v_n$ est fournie par le tableau suivant :

$\lim v_n$ \ $\lim u_n$	$l \in \mathbb{R}_+^*$	$l \in \mathbb{R}_-^*$	0	$+\infty$	$-\infty$
$l' \in \mathbb{R}_+^*$	ll'	ll'	0	$+\infty$	$-\infty$
$l \in \mathbb{R}_-^*$	ll'	ll'	0	$-\infty$	$+\infty$
0	0	0	0	?	?
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$+\infty$

(2) Soient u et v deux suites complexes convergeant respectivement vers $l \in \mathbb{C}$ et $l' \in \mathbb{C}$. La limite de $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors $(l + l')$ et la limite de $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ll'.

Preuve. A titre d'exemples, on va développer deux démonstrations.

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$: montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = +\infty$.

Soit $\mathbf{A} > 0$. On choisit $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$, $|u_n - l| < 1$ (définition de la limite de u appliquée à $\varepsilon = 1$). De même, on prend $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_2$, $v_n > A + |l| + 1$ (définition de la limite de v appliquée à $A' = A + |l| + 1$).

Alors en posant $N = \max(N_1, N_2)$ et en remarquant que $-u_n \leq |u_n - l| + |l|$, on obtient que **pour tout $\mathbf{n} \geq \mathbf{N}$,**

$$\mathbf{u_n} + \mathbf{v_n} \geq v_n - |u_n - l| - |l| > A + |l| + 1 - 1 - |l| = \mathbf{A}.$$

En conclusion, on a bien montré (voir les expressions en gras) que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = +\infty$.

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \in \mathbb{C}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l' \in \mathbb{C}$: montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = ll'$.

Soit $\varepsilon > 0$. On remarque que

$$|u_n v_n - ll'| \leq |u_n v_n - u_n l'| + |u_n l' - ll'| = |u_n||v_n - l'| + |l'||u_n - l|. \tag{2.1}$$

Il suffit donc de majorer chacun des deux termes de cette dernière somme. On choisit $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$, $|u_n - l| < \varepsilon' = \varepsilon/(2(|l'| + 1))$ (définition de la limite de u appliquée à

$\varepsilon' = \varepsilon/(2(|l'|+1)))$. Remarquons qu'en particulier, on a pour tout $n \geq N_1$,

$$|u_n| \leq |u_n - l| + |l| < \varepsilon' + |l|. \tag{2.2}$$

De même, on prend $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_2$, $|v_n - l'| < \varepsilon/(2(\varepsilon' + |l|))$ (définition de la limite de v appliquée à $\varepsilon'' = \varepsilon/(2(\varepsilon' + |l|)))$.

En posant $N = \max(N_1, N_2)$ et en utilisant les inégalités (2.1) et (2.2), on a **pour tout $\mathbf{n \geq N}$**

$$|\mathbf{u_n v_n} - ll'| < \frac{|u_n|}{\varepsilon' + |l|} \cdot \frac{\varepsilon}{2} + \frac{|l'|}{|l'|+1} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

En conclusion, on a bien $\lim_{n\to+\infty} u_n v_n = ll'$.□

Proposition 2.5 (limite de l'inverse) *Soit u une suite à valeurs réelles (respectivement complexes) ayant pour limite $l \in \mathbb{R}^*\{-\infty, +\infty\}$ (resp. $l \in \mathbb{C}^*\{-\infty, +\infty\}$). Alors $1/u$ existe à partir d'un certain rang et a pour limite $1/l$.*

Preuve. A titre d'exemple, on montre que si u tend vers $l \in \mathbb{C}^*$, alors $1/u$ tend vers $1/l$.

Soit $\varepsilon > 0$. On peut aussi supposer que $\varepsilon < |l|$ car si on montre la définition de la limite pour $\varepsilon < |l|$, elle sera par défaut vraie aussi pour $\varepsilon \geq |l|$. On considère alors $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$|u_n - l| < \min(\varepsilon, \varepsilon|l|(|l| - \varepsilon)). \tag{2.3}$$

En particulier, si $n \geq N$, u_n ne s'annule pas car

$$|u_n| \geq |l| - |u_n - l| > |l| - \varepsilon > 0. \tag{2.4}$$

Par conséquent, en utilisant les deux inégalités (2.3) et (2.4), on obtient **pour tout $\mathbf{n \geq N}$**,

$$\left|\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{u_n}} - \frac{\mathbf{1}}{l}\right| = \frac{|u_n - l|}{|l||u_n|} < \frac{\varepsilon|l|(|l| - \varepsilon)}{|l|(|l| - \varepsilon)} = \varepsilon.□$$

Proposition 2.6 (comparaison des limites, théorème des trois suites) *(1) Soient u et v deux suites réelles ayant des limites $l, l' \in \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$. Alors*

$$u_n \leq v_n \textit{ à partir d'un certain rang } \Longrightarrow l \leq l';$$

(2) Soient u, v et w trois suites réelles telles que $u_n \leq v_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang . Alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = l \in \mathbb{R} \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} v_n = l.$$

(3) Soient u et v deux suites réelles telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang. Alors si u tend vers $+\infty$ (resp. v tend vers $-\infty$), il en est de même pour v (resp. u).

Preuve. (1) **1er cas** : $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. Montrons alors que $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Soit $\mathbf{A > 0}$. On considère $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $u_n \geq A$. Par conséquent, **pour tout $\mathbf{n \geq N}$**, on a $\mathbf{v_n} \geq u_n > \mathbf{A}$. Autrement dit, la limite de v est bien $+\infty$.

2ème cas : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$. Alors par une démonstration analogue, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

3ème cas : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l'$. Montrons que $l \leq l'$:

soit $\varepsilon > 0$ et considérons N_1 et N_2 tels que pour tout $n \geq N_1$, $|u_n - l| < \varepsilon$ et pour tout $n \geq N_2$, $|v_n - l'| < \varepsilon$. Alors pour $n = \max(N_1, N_2)$, il vient

$$l - \varepsilon < u_n \leq v_n < l' + \varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit bien que $l \leq l'$.

(2) On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l \in \mathbb{R}$. Montrons alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$.

Soit $\varepsilon > \mathbf{0}$ et considérons N_1 et N_2 tels que pour tout $n \geq N_1$, $|u_n - l| < \varepsilon$ et pour tout $n \geq N_2$, $|w_n - l| < \varepsilon$. Alors en posant $N = \max(N_1, N_2)$, on a **pour tout** $\mathbf{n} \geq \mathbf{N}$

$$\mathbf{l} - \varepsilon < u_n \leq \mathbf{v_n} \leq w_n < \mathbf{l} + \varepsilon. \square$$

Exemple. On considère la suite u définie par $u_n = (-1)^n/n$, $n \geq 1$. Alors pour tout $n \geq 1$, on a $-\dfrac{1}{n} \leq u_n \leq \dfrac{1}{n}$ donc d'après le théorème des trois suites, u tend vers 0.

2.1.3 Suites monotones

Théorème 2.7 (convergence des suites monotones) *Soit u une suite réelle croissante (resp. décroissante). On a l'équivalence*

$$u \textit{ converge} \iff u \textit{ est majorée (resp. minorée).}$$

Dans le cas de convergence, la limite de u est $\sup\{u_n; n \geq 0\}$ *(resp.* $\inf\{u_n; n \geq 0\}$*).*

Preuve. On considère une suite croissante u.

Si u n'est pas majorée, montrons que u tend vers $+\infty$. En effet, **soit** $\mathbf{A} > \mathbf{0}$. Comme A ne majore pas $\{u_n; n \geq 0\}$, soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N > A$. Comme u est croissante, on en déduit que **pour tout** $\mathbf{n} \geq \mathbf{N}$, $\mathbf{u_n} > \mathbf{A}$.

Supposons à présent $\{u_n; n \in \mathbb{N}\}$ majoré. Cet ensemble est non vide et majoré donc possède une borne supérieure que l'on notera $s \in \mathbb{R}$. En particulier,

$$u_n \leq s \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.5}$$

Montrons que u tend vers s. En effet, **soit** $\varepsilon > \mathbf{0}$. D'après la proposition 1.7, soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $s - \varepsilon < u_N \leq s$. Comme u est croissante, on a par conséquent pour tout $n \geq N$,

$$s - \varepsilon < u_N \leq u_n \leq s. \tag{2.6}$$

On déduit des inégalités (2.5) et (2.6) que **pour tout** $\mathbf{n} \geq \mathbf{N}$,

$$|\mathbf{u_n} - \mathbf{s}| = s - u_n < \varepsilon. \square$$

Exemple. On considère la suite u définie par $u_0 = 1$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$ si $n \geq 0$. Montrons la convergence de u.

• $u_n \in [0,1]$ pour tout $n \geq 0$ (par récurrence) : pour $n = 0$, le résultat est vrai et supposons qu'il est vrai à un certain rang $n \geq 0$. Alors par croissance de la fonction sin sur $[0,1]$, on a

$$0 = \sin(0) \leq u_{n+1} = \sin(u_n) \leq \sin(1) \leq 1,$$

ce qui prouve le résultat au rang $(n+1)$.

• Pour tout $x \geq 0$, $\sin(x) \leq x$: on peut le justifier par exemple en étudiant la fonction $f(x) = x - \sin(x)$.

• La suite u est décroissante : en effet, pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = \sin(u_n) \leq u_n$.

En conclusion, la suite u est décroissante et minorée par 0 donc converge vers un certain réel $l \in [0,1]$. On verra plus tard que l doit aussi satisfaire l'équation $l = \sin(l)$, soit $l = 0$.

Remarque. La réciproque est fausse : si une suite converge, elle peut ne pas être monotone, comme par exemple $u_n = (-1)^n/n$, $n \geq 1$. En revanche, on peut montrer que toute suite qui converge est bornée.

Application : suites adjacentes. Soient u et v deux suites telles que

$$(1) u \text{ croît}\,; \quad (2) v \text{ décroît}\,; \quad (3) \lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0.$$

Alors on a $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, u et v convergent vers la même limite

$$l = \sup\{u_n; n \in \mathbb{N}\} = \inf\{v_n; n \in \mathbb{N}\}.$$

l est aussi l'unique réel vérifiant $u_n \leq l \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Montrons ces affirmations : la suite $(v-u)$ est décroissante et tend vers 0 donc d'après le théorème 2.7,
$0 = \inf\{(v_n - u_n); n \in \mathbb{N}\}$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$.

u est alors une suite croissante et majorée par v_0 donc converge vers $\sup\{u_n; n \in \mathbb{N}\}$ et de même, v est une suite décroissante minorée par u_0 donc converge vers $\inf\{v_n; n \in \mathbb{N}\}$. Sachant que la différence $(v-u)$ tend vers 0, on obtient que u et v tendent vers la même limite.

Exemple. On considère la suite w définie par $w_n = (-1)^n/n$, $n \geq 1$, et on pose $u_n = w_{2n-1}$ et $v_n = w_{2n}$, $n \geq 1$. Alors on peut vérifier que u et v sont des suites adjacentes qui convergent toutes deux vers 0.

2.1.4 Suites complexes

Proposition 2.8 (convergence des suites complexes) *Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. u converge si et seulement si sa partie réelle $(Re(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et sa partie imaginaire $(Im(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.*

Preuve. Supposons que $\lim_{n\to+\infty} u_n = l \in \mathbb{C}$. Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{Re}(u_n) = \mathrm{Re}(l) \in \mathbb{C}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{Im}(u_n) = \mathrm{Im}(l) \in \mathbb{C}$.

Soit $\varepsilon > \mathbf{0}$. On choisit $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n - l| < \varepsilon$. En particulier, on a

$$|\mathrm{Re}(\mathbf{u_n}) - \mathrm{Re}(l)| = |\mathrm{Re}(u_n - l)| \leq |u_n - l| < \varepsilon.$$

Il en va de même pour la partie imaginaire.

Réciproquement, on suppose que $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{Re}(u_n) = x \in \mathbb{R}$ et $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{Im}(u_n) = y \in \mathbb{R}$. Alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = l = x + iy \in \mathbb{C}$ d'après la proposition 2.4 sur la sommation des limites.□

2.2 Suites équivalentes. Notations de Landau

2.2.1 Définitions

Définition 2.9 (négligeabilité, équivalence) *Soient u et v deux suites réelles ou complexes.*
(1) On dit que u est négligeable *devant v s'il existe une suite $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} \eta_n = 0$ et $u_n = \eta_n v_n$ à partir d'un certain rang. On le note*

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n).$$

(2) On dit que u est équivalente *à v s'il existe une suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} \theta_n = 1$ et $u_n = \theta_n v_n$ à partir d'un certain rang. On le note*

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n.$$

Remarque. Lorsque v_n ne s'annule pas pour n assez grand, on a

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n) \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$$

et

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

En particulier,

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(1) \iff \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

et

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} l \iff \lim_{n\to+\infty} u_n = l \quad \textbf{si } l \neq \mathbf{0}.$$

Attention : une suite équivalente à zéro est une suite qui stationne en zéro à partir d'un certain rang.

Exemples. Négligeabilités classiques : pour tous $\alpha, a > 0$ et toute suite u tendant vers $+\infty$, on a

$$\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{=} o\left({u_n}^{\alpha}\right), \quad {u_n}^{\alpha} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(a^{u_n}\right), \quad a^n \underset{n\to+\infty}{=} o(n!).$$

De plus, les puissances de u_n se rangent de manière croissante :

$$ {u_n}^{\alpha} \underset{n\to+\infty}{=} o\left({u_n}^{\beta}\right) \text{ si } \alpha < \beta.$$

Equivalences classiques : soient u une suite tendant vers 0 et $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Alors

$$\ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n, \quad e^{u_n}-1 \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n, \quad (1+u_n)^\alpha - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha u_n,$$

$$\sin(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n, \quad 1-\cos(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{u_n^2}{2}.$$

Proposition 2.10 *Soient u et v deux suites réelles ou complexes. On a*

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Longleftrightarrow u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n).$$

Preuve. On procède par équivalence :

$$\begin{aligned} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n &\Longleftrightarrow \exists \theta_n; u_n = \theta_n v_n \text{ à partir d'un certain rang et } \lim_{n\to+\infty} \theta_n = 1 \\ &\Longleftrightarrow \exists \theta_n; u_n - v_n = (\theta_n - 1)v_n \text{ à partir d'un certain rang et } \lim_{n\to+\infty} \theta_n = 1 \\ &\Longleftrightarrow \exists \eta_n; u_n - v_n = \eta_n v_n \text{ à partir d'un certain rang et } \lim_{n\to+\infty} \eta_n = 0 \quad (\eta_n = \theta_n - 1).\square \end{aligned}$$

2.2.2 Propriétés de calculs

Proposition 2.11 (règles de calcul avec les négligeables) *Soient u, v, w trois suites réelles ou complexes.*

$$\begin{array}{ll} (1) & u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n), \quad v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n) \Longrightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n); \\ (2) & u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n), \quad w_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n) \Longrightarrow u_n + w_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n); \\ (3) & u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n) \Longrightarrow u_n w_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n w_n). \end{array}$$

Preuve. (1) Il existe N_1 et η suite tendant vers 0 tels que pour tout $n \geq N_1$, $u_n = \eta_n v_n$. De même, soient N_2 et ρ suite tendant vers 0 tels que pour tout $n \geq N_2$, $v_n = \rho_n w_n$. Alors pour tout $n \geq \max(N_1, N_2)$, on a $u_n = (\eta_n \rho_n) w_n$ et $\lim_{n\to+\infty} \eta_n \rho_n = 0$. Par conséquent, on a bien $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$.

Les autres propriétés se montrent de manière analogue.$\square$

Proposition 2.12 (règles de calcul avec les équivalents) *Soient u, v, w, t quatre suites réelles ou complexes.*

$$\begin{array}{ll} (0) & u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n; \\ (1) & u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Longleftrightarrow v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n; \\ (2) & u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n, \quad v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n \Longrightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n; \\ (3) & u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n, u_n, v_n \neq 0 \textit{ à partir d'un certain rang} \Longrightarrow \dfrac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{v_n}; \\ (4) & u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Longrightarrow u_n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n^\alpha \textit{ si } \alpha \in \mathbb{R} \textit{ est fixé}; \\ (5) & u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n, \quad w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} t_n \Longrightarrow u_n w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n t_n. \end{array}$$

Preuve. (1) Soit une suite θ tendant vers 1 telle que pour n assez grand, $u_n = \theta_n v_n$. Alors θ est une suite non nulle à partir d'un certain rang, dont l'inverse tend aussi vers 1 et on peut écrire $v_n = (1/\theta_n)u_n$.

Les autres propriétés se démontrent de manière analogue.□

Remarque. Attention : on ne peut pas additionner des équivalents. Par exemple, si $u_n = n^2+n$ et $v_n = -n^2$, on a

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2 \text{ et } v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -n^2$$

MAIS

$$u_n + v_n = n \not\sim n^2 - n^2 = 0.$$

Exemple 1. Déterminons un équivalent simple de $u_n = \sqrt[4]{n^4+1} - n$:

$$\sqrt[4]{n^4+1} - n = n\left(1 + \frac{1}{n^4}\right)^{1/4} - n.$$

En utilisant $(1+\frac{1}{n^4})^{1/4} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1/(4n^4)$, on obtient

$$\sqrt[4]{n^4+1} - n = n\left(1 + \frac{1}{4n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) - n = \frac{1}{4n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4n^3}.$$

Remarquons que si la racine est carrée ou cubique, on peut aussi obtenir un équivalent en utilisant la quantité conjuguée.

Exemple 2. Déterminons un équivalent simple de $u_n = \dfrac{n^{n+1}}{(n+1)^n}$:

$$\frac{n^{n+1}}{(n+1)^n} = n\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = n\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} = n\exp\left(-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right).$$

En utilisant $\ln(1+(1/n)) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1/n$, on obtient

$$\frac{n^{n+1}}{(n+1)^n} \underset{n\to+\infty}{=} n\exp\left(-n\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = ne^{-1}e^{o(1)}.$$

Il reste à remarquer que $e^{o(1)}$ tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$ pour avoir l'équivalent suivant :

$$\frac{n^{n+1}}{(n+1)^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{e}.$$

2.2.3 Détermination de limites

Proposition 2.13 (équivalents et limites) *Soient u et v deux suites réelles ou complexes telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Alors pour tout $l \in \mathbb{C} \cup \{-\infty, +\infty\}$, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l \iff \lim_{n\to+\infty} v_n = l.$$

Preuve. Il suffit d'écrire $u_n = \theta_n v_n$ pour n assez grand, avec θ_n tendant vers 1, puis d'appliquer la règle de produit des limites.□

Exemples 1 et 2. D'après les deux exemples précédents, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[4]{n^4+1} - n = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{n+1}}{(n+1)^n} = +\infty.$$

Exemple 3. Déterminons la limite de $u_n = n^2\left((n+1)^{1/n} - n^{1/n}\right)$:

$$(n+1)^{1/n} - n^{1/n} = n^{1/n}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/n} - 1\right) = e^{\ln(n)/n}\left(\exp\left(\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) - 1\right).$$

En utilisant $\ln(1+1/n) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1/n$, on obtient

$$(n+1)^{1/n} - n^{1/n} = e^{\ln(n)/n}\left(\exp\left(\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - 1\right).$$

De plus, en utilisant

$$e^{v_n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$$

pour une suite $v_n = 1/n^2 + o(1/n^2)$ tendant vers 0, on a

$$(n+1)^{1/n} - n^{1/n} = e^{\ln(n)/n}\left(\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

Il reste à remarquer que $e^{\ln(n)/n}$ a pour limite 1 pour obtenir les équivalents

$$(n+1)^{1/n} - n^{1/n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2} \text{ et } u_n = n^2\left((n+1)^{1/n} - n^{1/n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1.$$

En conclusion, u tend vers 1 quand n tend vers l'infini.

2.3 Sous-suites. Valeurs d'adhérence

2.3.1 Définitions

Définition 2.14 (extraction) *Une application $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est dite* extraction *si elle est strictement croissante.*

Exemples. $\varphi(n) = n, n+1, 2n, 2n+1, n^2, E(\exp(n))$ sont des extractions. On peut noter qu'une extraction φ satisfait toujours $\varphi(n) \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ceci peut d'ailleurs être rapidement vérifié par récurrence).

Définition 2.15 (sous-suites) *Soit u une suite réelle ou complexe. Une suite v est dite* sous-suite *ou* suite extraite *de u s'il existe une extraction φ telle que pour tout $n \geq 0$, $v_n = u_{\varphi(n)}$.*

Exemples. $v = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}, (u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}, (u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}, (u_{n^2})_{n\in\mathbb{N}}, (u_{\exp(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ sont des sous-suites de u.

En particulier, la suite constante égale à 1 est une sous-suite de $(-1)^n$.

Proposition 2.16 *Soient u, v, w trois suites réelles ou complexes. Si v est une suite extraite de u et w une suite extraite de v, alors w est aussi une suite extraite de u.*

Preuve. Soient φ et ψ deux extractions telles que $v_n = u_{\varphi(n)}$ et $w_n = v_{\psi(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $w_n = u_{\varphi\circ\psi(n)}$ et $\varphi \circ \psi$ est aussi une extraction car composée de deux applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ strictements croissantes.□

Proposition 2.17 (sous-suites d'une suite convergente) *Soit u une suite réelle ou complexe ayant une limite. Alors toutes les sous-suites de u tendent vers la même limite.*

Preuve. On va montrer le résultat dans le cas où la limite de u est un réel. Le cas où elle est infinie se traite de manière analogue. Soient v une sous-suite de u et φ l'extraction associée. Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$.

Soit $\varepsilon > 0$. On choisit N tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n - l| < \varepsilon$. Alors en remarquant que si $n \geq N$, on a aussi $\varphi(n) \geq \varphi(N) \geq N$, on obtient que **pour tout $\mathbf{n \geq N}$**

$$|\mathbf{v_n} - l| = |u_{\varphi(n)} - l| < \varepsilon.\square$$

Définition 2.18 (valeur d'adhérence) *Soit u une suite réelle (resp. complexe) et $l \in \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$). l est dit* valeur d'adhérence *de u s'il existe une suite extraite de u convergeant vers l.*

Exemple 1. (*suite convergente*) Si u est une suite convergente, elle admet d'après la proposition 2.17 une unique valeur d'adhérence qui est sa limite.

Lorsqu'une suite n'a pas de limite, tous les cas de figures sont possibles.

Exemple 2. (*pas de valeur d'adhérence*) La suite u définie par $u_n = (-1)^n n$ n'a aucune valeur d'adhérence. En effet, par l'absurde, soit $(u_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ une sous-suite convergeant vers un certain $l \in \mathbb{R}$. On prend $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|u_{\varphi(n)} - l| < 1$. En particulier, pour tout $n \geq \max(N, E(|l|) + 1)$, on a

$$n \leq \varphi(n) = |u_{\varphi(n)}| \leq |l| + |u_{\varphi(n)} - l| < |l| + 1 < n,$$

ce qui est absurde.

Exemple 3. (*unique valeur d'adhérence mais divergence*) La suite u définie par $u_n = n(1 + (-1)^n)$, $n \geq 0$, a une unique valeur d'adhérence qui est 0. En effet, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite stationnaire nulle donc converge vers 0. Montrons que toute sous-suite convergente de u tend vers 0. Considérons donc une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers $l \neq 0$. Alors pour n assez grand, $u_{\varphi(n)} \neq 0$ donc $\varphi(n)$ est pair. Par conséquent, $u_{\varphi(n)} = 2\varphi(n) \geq 2n$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = +\infty$, ce qui est absurde. En conclusion, 0 est la seule valeur d'adhérence de u mais u ne converge pas (puisque $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l'infini).

Exemple 4. (*plusieurs valeurs d'adhérence distinctes*) On considère la suite u définie par

$$\begin{cases} u_{3n} &= n\sin\left(\frac{1}{3n}\right) \\ u_{3n-1} &= \frac{1}{3n-1} \\ u_{3n-2} &= 3n-2 \end{cases}, n \geq 1.$$

Alors 0 est valeur d'adhérence de u comme limite de $(u_{3n-1})_{n\geq 1}$. De même, $1/3$ est une autre valeur d'adhérence de u comme limite de $(u_{3n})_{n\geq 1}$ et $+\infty$ est la limite de $(u_{3n-2})_{n\geq 1}$.

On peut prouver de plus que u n'a pas d'autre valeur d'adhérence que 0 et $1/3$: en effet, raisonnons par l'absurde et considérons l une valeur d'adhérence réelle distincte de 0 et $1/3$. En particulier, soit $\varepsilon > 0$ tel que $|l-0| = |l| > \varepsilon$ et $|l - \frac{1}{3}| > \varepsilon$. Par ailleurs, soit une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers l.

Par définition de la limite, soit $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$, $|u_{\varphi(n)} - l| < \varepsilon/3$.

Comme la suite $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $1/3$, soit $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_2$, $|u_{3n} - \frac{1}{3}| < \varepsilon/3$.

De même, soient N_3 et N_4 dans $\mathbb{N}^*$ tels que pour tout $n \geq N_3$, $|u_{3n-1}| < \varepsilon/3$ et pour tout $n \geq N_4$, $u_{3n-2} > |l| + \varepsilon/3$.

Alors si $n \geq \max(N_1, 3N_2, 3N_3, 3N_4)$, on a $\varphi(n) \geq n \geq N_1$, donc $|u_{\varphi(n)} - l| < \varepsilon/3$. Montrons aussi que $|u_{\varphi(n)} - l| > \varepsilon/3$, ce qui fournira l'absurdité. En effet, trois cas sont possibles :

• soit $\varphi(n)$ est multiple de 3, c'est-à-dire $\varphi(n) = 3k$, et comme $\varphi(n) \geq n \geq 3N_2$, on a $k \geq N_2$. Par conséquent,

$$|u_{\varphi(n)} - 1/3| = |u_{3k} - l| < \varepsilon/3 \text{ et } |u_{\varphi(n)} - l| \geq |1/3 - l| - |u_{\varphi(n)} - 1/3| \geq \varepsilon - \varepsilon/3 > \varepsilon/3.$$

• soit $\varphi(n) = 3k-1$. Comme $\varphi(n) \geq n \geq 3N_3$, on a $k \geq \mathbb{N}_3$. Par conséquent,

$$|u_{\varphi(n)}| = |u_{3k-1}| < \varepsilon/3 \text{ et } |u_{\varphi(n)} - l| \geq |l| - |u_{\varphi(n)}| \geq \varepsilon - \varepsilon/3 > \varepsilon/3.$$

• soit $\varphi(n)$ s'écrit $\varphi(n) = 3k-2$. Comme $\varphi(n) \geq n \geq 3N_4$, on a $k \geq N_4$. Par conséquent,

$$u_{\varphi(n)} = u_{3k-2} > |l| + \varepsilon/3 \text{ et } |u_{\varphi(n)} - l| \geq u_{\varphi(n)} - |l| > \varepsilon/3.$$

Donc dans tous les cas, on a deux inégalités contradictoires $|u_{\varphi(n)} = l| < \varepsilon/3$ et $|u_{\varphi(n)} - l| > \varepsilon/3$. Donc u n'a pas d'autre valeur d'adhérence que 0 et $1/3$.

2.3.2 Théorème de Bolzano-Weierstrass

Théorème 2.19 (théorème de Bolzano-Weierstrass) *Toute suite bornée possède une sous-suite convergente.*

Preuve.
1. Cas réel. Montrons tout d'abord le résultat pour une suite réelle bornée. Soient $a < b \in \mathbb{R}$ tels que $u_n \in [a, b]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La première difficulté est de trouver un bon "candidat" pour la limite de sous-suite puis il faut ensuite construire de manière récursive la sous-suite de u qui va converger vers ce "candidat".

1ère étape : obtention du candidat pour la limite l.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère

$$M_n = \sup\{u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, \cdots\} = \sup\{u_{n+p}; p \in \mathbb{N}\},$$

c'est-à-dire la borne supérieure de tous les termes de la suite à partir du terme u_n. Notons que M_n existe car il s'écrit comme le sup d'un ensemble non vide et majoré (par b). De plus,

$M_{n+1} = \sup\{u_{n+1}, u_{n+2}, u_{n+3}, \cdots\}$ est le sup du même ensemble privé de l'élément u_n donc est inférieur à M_n. Par conséquent, $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante et minorée (par a) donc elle converge vers un certain réel $l \in [a,b]$ et $l \leq M_n$ pour tout n. Montrons à présent que l est la limite d'une sous-suite de u.

2ème étape : construction récursive d'une sous-suite convergeant vers l.

Il faut définir pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \in \mathbb{N}$ tel que φ soit une fonction strictement croissante et telle que $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.

•$n = 0$: on pose $\varphi(0) = 0$.

•$n > 0$: on suppose que $\varphi(0) < \varphi(1) < \cdots < \varphi(n-1)$ ont été construits tels que

$$|u_{\varphi(k)} - l| < \frac{1}{k} \text{ pour tous } 1 \leq k \leq (n-1).$$

Construisons donc $\varphi(n) > \varphi(n-1)$ tel que $|u_{\varphi(n)} - l| < \frac{1}{n}$.

Appliquons la définition de $\lim_{p\to+\infty} M_p = l$ à $\varepsilon = \frac{1}{n}$. Le rang à partir duquel la distance entre la suite et la limite est inférieure à ε va alors dépendre de n, c'est-à-dire il existe un certain $f(n) \in N$ tel que pour tout $p \geq f(n)$, $|M_p - l| < \frac{1}{n}$. En posant $g(n) = \max(f(n), \varphi(n-1)+1)$, on a en particulier, en exploitant l'inégalité $M_p \geq l$ pour tout p,

$$l \leq M_{g(n)} = \sup\{u_{g(n)}, u_{g(n)+1}, \cdots\} \leq l + \frac{1}{n}.$$

Le réel $(l - \frac{1}{n})$ ne majore pas l'ensemble $\{u_{g(n)}, u_{g(n)+1}, u_{g(n)+2}, \cdots\}$ donc il existe un entier supérieur à $g(n)$, noté $\varphi(n)$ tel que

$$l - \frac{1}{n} \leq u_{\varphi(n)} \leq l + \frac{1}{n}.$$

Il reste à vérifier que $\varphi(n) > \varphi(n-1)$. C'est bien le cas car

$$\varphi(n) \geq g(n) = \max(f(n), \varphi(n-1)+1) \geq \varphi(n-1)+1 > \varphi(n-1).$$

3ème étape : conclusion.

On vient de construire de manière récursive une extraction φ telle que pour tout $n \geq 1$,

$$|u_{\varphi(n)} - l| \leq \frac{1}{n}.$$

Par la proposition 2.6 sur la comparaison des limites, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = l$.

2. Cas complexe. Soit u une suite complexe bornée et posons $v_n = \mathrm{Re}(u_n)$ et $w_n = \mathrm{Im}(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. v est une suite réelle bornée donc soit φ une extraction telle que $(v_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente. De plus, $(w_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi une suite réelle bornée donc soit ψ une autre extraction telle que $(w_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente. Par ailleurs, $(v_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de $(v_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ donc est elle-même convergente. En conclusion, $(u_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite complexe dont la partie réelle et la partie imaginaire sont convergentes donc elle est convergente.□

Chapitre 3

Séries à terme général réel ou complexe

3.1 Définition et exemples

Définition 3.1 (séries) *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles ou complexes. La* série de terme général *u_n est la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles définies par $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La série de terme général u_n est dite* convergente *si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et* divergente *sinon. En cas de convergence, on note la limite $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ et par abus de notation, on peut écrire "$\sum u_n$ converge".*

Exemple 1. On pose $u_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles associée vérifie $S_n = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La série de terme général u_n est donc divergente.

Exemple 2. On pose $u_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles associée vérifie $S_n = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La série de terme général u_n est donc divergente.

Exemple 3. Soit $a \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. On pose $u_n = a^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles associée vérifie $S_n = \sum_{k=0}^{n} a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La série de terme général u_n est donc convergente si et seulement si $|a| < 1$ et dans ce cas, la valeur de la somme est

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k = \frac{1}{1-a}.$$

Remarque 1. De même que pour la convergence des suites, la convergence des séries est une propriété asymptotique, c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas des premières valeurs de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque 2. La somme de deux séries convergentes est encore une série convergente, c'est-à-dire que si u_n et v_n sont les termes généraux de suites convergentes, alors la série de terme général $(u_n + v_n)$ est encore convergente.

Remarque 3. Notons que la donnée des sommes partielles S_n, $n \in \mathbb{N}$, permet de retrouver les valeurs de u_n, $n \in \mathbb{N}$. En effet, on a l'identité

$$u_n = S_n - S_{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Remarque 4.(Transformation suite-série) En fait, toute suite peut être vue comme la suite des sommes partielles d'une série. En effet,

$$u_n = \sum_{k=1}^{n}(u_k - u_{k-1}) + u_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Proposition 3.2 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles ou complexes. Si la série de terme général u_n converge, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.*

Preuve. Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et soit S la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En particulier, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{n-1} = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}(S_n - S_{n-1}) = S - S = 0.\square$$

Remarque. Une conséquence de la proposition précédente est que lorsqu'on cherche à déterminer si la série de terme général u_n est convergente ou non, il faut impérativement commencer par chercher la limite de la suite u. S'il n'y en a pas ou si elle est différente de zéro, alors nécessairement, la série de terme général u_n diverge. On dit alors qu'elle *diverge grossièrement.*

3.2 Séries à terme général positif

Proposition 3.3 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes réels positifs. La série de terme général u_n converge si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée.*

Preuve. La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles est croissante car $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On conclut par application du théorème 2.7.$\square$

Proposition 3.4 (critères de comparaison) *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à termes réels positifs.*

(1) *Si $0 \leq u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang, alors $\sum v_n$ converge $\Longrightarrow \sum u_n$ converge ;*

(2) *Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$, alors $\sum v_n$ converge $\Longrightarrow \sum u_n$ converge ;*

(3) *Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors $\sum v_n$ converge $\Longleftrightarrow \sum u_n$ converge ;*

Preuve. Notons $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$) la suite des sommes partielles de la série de terme général u_n (resp. v_n).
(1) Si $\sum v_n$ converge, alors la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par un réel positif que nous noterons $M > 0$. Quitte à ne considérer les suites qu'à partir du rang auquel l'inégalité $u_n \leq v_n$ est vraie,

on peut supposer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$. En additionnant les inégalités $0 \leq u_k \leq v_k$, $0 \leq k \leq n$, on obtient

$$0 \leq S_n \leq T_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Par conséquent, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est également majorée.

(2) Par définition du caractère négligeable, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $u_n \leq \varepsilon v_n$. En prenant $\varepsilon = 1$, on a à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$ et on peut donc appliquer (1).

(3) Supposons que $\sum v_n$ converge. Alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ peut se réécrire de la manière suivante : $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$. Par conséquent, en appliquant (2) aux suites $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on obtient que $\sum w_n$ est convergente. Or $u_n = w_n + v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc le terme général de la série $\sum u_n$ est la somme de deux termes généraux de séries convergentes. Par conséquent, $\sum u_n$ converge. Enfin, les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jouant des rôles symétriques, on peut montrer de la même manière que si $\sum u_n$ converge, alors $\sum v_n$ converge.□

Exemple. Séries de Riemann : soit $\alpha > 0$. On pose $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que la série de terme général u_n est convergente si et seulement si $\alpha > 1$. Tout d'abord, le terme général $1/n^\alpha$ tend bien vers 0 donc on n'a pas divergence grossière. De plus, on utilise ce que l'on appelle une comparaison série-intégrale : comme la fonction $x \longmapsto x^{-\alpha}$ est décroissante, on a

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \frac{1}{x^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [k, k+1].$$

En intégrant terme à terme cet encadrement par rapport à la variable x et entre les bornes k et $(k+1)$, on obtient pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha} = \int_k^{k+1} \frac{1}{(k+1)^\alpha} dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x^\alpha} dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k^\alpha} dx = \frac{1}{k^\alpha}.$$

En fixant $n \in \mathbb{N}^*$ et en sommant les inégalités précédentes pour k allant de 1 à n, on obtient par utilisation de Chasles et du décalage d'indice de la première somme,

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^\alpha} - 1 \leq \int_1^{n+1} \frac{1}{x^\alpha} dx \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}. \tag{3.1}$$

On peut de plus calculer l'intégrale au milieu lorsque $\alpha \neq 1$:

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{\alpha - 1} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \right).$$

Si $\alpha = 1$, on a

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = \ln(n+1).$$

Par conséquent, si $\alpha > 1$, l'intégrale est majorée par $1/(\alpha - 1)$ et donc d'après l'encadrement (3.1), les sommes partielles de terme général $1/n^\alpha$ sont majorées. Donc la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge.

Si $\alpha = 1$, l'intégrale tend vers $+\infty$ quand n tend vers l'infini donc d'après l'encadrement (3.1), les sommes partielles de terme général $1/n$ ne sont pas majorées, c'est-à-dire que la série $\sum 1/n$ diverge (série appelée *série harmonique*).

Enfin, si $0 < \alpha < 1$, $\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}$ donc d'après le point (1) de la proposition de comparaison, comme la somme $\sum \frac{1}{n}$ diverge, $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge aussi.

3.3 Séries à terme général quelconque

Théorème 3.5 (séries absolument convergente) *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes complexes. Si la série $\sum |u_n|$ est convergente (on dit alors que la série $\sum u_n$ est* absolument convergente*), alors la série $\sum u_n$ est aussi convergente.*

Preuve. On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n^+ = \max(u_n, 0)$ et $u_n^- = \max(-u_n, 0)$. Il est facile de vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n^+ \geq 0$, $u_n^- \geq 0$, que $u_n = u_n^+ - u_n^-$ et $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$. En particulier, $0 \leq u_n^+ \leq |u_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc d'après le point (1) de la proposition 3.4, $\sum u_n^+$ converge et de même, $\sum u_n^-$ converge aussi. Par conséquent, comme u_n s'écrit comme la somme des termes généraux de deux suites convergentes, la série $\sum u_n$ est aussi convergente.□

Remarque. La réciproque est fausse. Il arrive que la série de terme général u_n soit convergente sans que la série de terme général la valeur absolue de u_n le soit. Par exemple, $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge (voir théorème 3.6) mais $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

Théorème 3.6 (critère spécifique des séries alternées) *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à terme général positif, décroissante et de limite nulle. Alors la série de terme général $(-1)^n u_n$ est convergente.*

En cas de convergence, si S est sa somme et pour tout $n \in \mathbb{N}$, R_n désigne le reste d'ordre n défini par l'égalité $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k = S - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$, alors R_n est du signe de $(-1)^{n+1}$ et $|R_n| \leq u_{n+1}$.

Preuve. On désigne par $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de la série de terme général $(-1)^n u_n$ et on note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = S_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k u_k$ et $B_n = S_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k u_k$. Montrons que les suites $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. En effet, si $n \in \mathbb{N}$,

$$A_{n+1} - A_n = (-1)^{2n+2} u_{2n+2} + (-1)^{2n+1} u_{2n+1} = u_{2n+2} - u_{2n+1} \leq 0.$$

Par conséquent, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante et on peut montrer de la même manière que $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante. Enfin,

$$\lim_{n\to+\infty} (A_n - B_n) = -(-1)^{2n+1} u_{2n+1} = 0.$$

Ceci implique que les deux suites convergent vers la même limite notée S et donc $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers S.

Montrons l'affirmation concernant le reste : en particulier, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$S_{2n+1} = B_n \leq S \leq A_n = S_{2n}. \tag{3.2}$$

Donc en soustrayant dans l'encadrement (3.2) S_{2n}, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$-u_{2n+1} = (-1)^{2n+1} u_{2n+1} \leq R_{2n} = S - S_{2n} \leq 0.$$

De même, en soustrayant S_{2n+1} dans l'encadrement $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n+2}$, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq R_{2n+1} = S - S_{2n+1} \leq (-1)^{2n+2} u_{2n+2} = u_{2n+2}.\square$$

Exemples. Si $\alpha > 0$, la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est convergente mais absolument convergente seulement si $\alpha > 1$.

Contre-exemples. Il faut toujours vérifier que les trois conditions -signe constant, décroissance et limite nulle- sont satisfaites (les deux dernières impliquant la première). Par exemple, si $u_n = 1 + \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, les deux premières conditions sont vérifiées mais pas la troisième et la série $\sum (-1)^n u_n$ diverge grossièrement. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left\{ \begin{array}{lcl} u_{2n} & = & \frac{1}{2n} \\ u_{2n+1} & = & 0 \end{array} \right.$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les conditions d'être de signe constant et de tendre vers 0 mais elle n'est pas décroissante. La série de terme général u_n est divergente par propriété de la série harmonique.

Chapitre 4

Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles. Continuité

Vocabulaire topologique

Définition 4.1 (voisinage) *Soient A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et x un point de A. On dit que A est un* voisinage de $x \in \mathbb{R}$ *s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset A$.*

Exemples. L'intervalle $]0,1[$ est voisinage de tous ses points. En effet, si $x \in]0,1[$, soit $x \leq 1/2$ et dans ce cas, $\varepsilon = x$ convient ; soit $x \geq 1/2$ et dans ce cas, $\varepsilon = 1-x$ convient. Cependant, $[0,1]$ n'est pas un voisinage de 1 car il n'y a pas de point à droite de 1 dans cet intervalle. Plus généralement, les intervalles $[a,b]$, $]a,b[$, $[a,b[$ et $]a,b]$ $(a<b)$ sont voisinages des points qui sont dans $]a,b[$.

Définition 4.2 (adhérence) *Soient A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et x un point de A. On dit que x est* adhérent à A *si pour tout $\varepsilon > 0$, $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap A \neq \emptyset$. On note $\overline{A}$ l'ensemble de tous les points adhérents à A et on l'appelle* adhérence de A.

Exemples. Tous les points de A sont clairement dans $\overline{A}$. La réciproque est fausse : en effet, 1 est un point adhérent à l'intervalle $]0,1[$ bien qu'il ne soit pas contenu dans cet intervalle. Plus généralement, l'adhérence des intervalles $[a,b]$, $]a,b[$, $[a,b[$ et $]a,b]$ $(a<b)$ est l'intervalle $[a,b]$. De même, l'adhérence de $[a,+\infty[$ ou $]a,+\infty[$ $(a \in \mathbb{R})$ est l'intervalle $[a,+\infty[$.

Définition 4.3 (densité d'une partie de $\mathbb{R}$) *On considère un sous-ensemble D de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. On dit que D est une partie* dense *dans $\mathbb{R}$ si $\overline{D} = \mathbb{R}$.*

Théorème 4.4 *$\mathbb{Q}$ est une partie dense dans $\mathbb{R}$.*

Preuve. Il suffit de montrer que si $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$ sont fixés, alors $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap\mathbb{Q} \neq \emptyset$.

En effet, en prenant $n = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1$, on a $(n-1) \leq 1/\varepsilon < n$, soit

$$0 < \frac{1}{n} < \varepsilon \leq \frac{1}{n-1}.$$

De plus, en prenant $k = E(nx) + 1$, on a $(k-1) \leq nx < k$ et donc

$$\frac{k-1}{n} \leq x < \frac{k-1}{n} + \frac{1}{n} < x + \varepsilon.$$

Autrement dit, $\frac{k}{n}$ est un élément de $\mathbb{Q}$ qui est contenu dans l'intervalle $]x, x+\varepsilon[$. En conclusion, $\mathbb{Q}$ est bien dense dans $\mathbb{R}$.□

Exemples. On peut aussi montrer que les ensembles $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $\{\sqrt{2}r; r \in \mathbb{Q}\}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

4.1 Limites d'une fonction

4.1.1 Définitions et critère séquentiel

Définition 4.5 (limites d'une fonction) *On considère une fonction f définie sur un ensemble non vide D_f de $\mathbb{R}$.*
(1) Soit $x_0 \in \overline{D_f}$. On dit que f a pour limite *$l \in \mathbb{R}$ quand x tend vers x_0 si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0; \forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap D_f, |f(x) - l| < \varepsilon.$$

(2) Soit $x_0 \in \overline{D_f} \setminus D_f$. On dit que f a pour limite *$+\infty$ (resp. $-\infty$) quand x tend vers x_0 si*

$$\forall A > 0, \exists \eta > 0; \forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap D_f, f(x) > A \text{ (resp. } f(x) < -A).$$

(3) On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que $[M, +\infty[\subset D_f$ (resp. $]-\infty, -M] \subset D_f$). On dit que f a pour limite *$l \in \mathbb{R}$ quand x tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists B > 0; \forall x \in]B, +\infty[\cap D_f \text{ (resp. }]-\infty, -B[\cap D_f)), |f(x) - l| < \varepsilon.$$

On dit que f a pour limite *$+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) si*

$$\forall A > 0, \exists B > 0; \forall x \in]B, +\infty[\cap D_f \text{ (resp. }]-\infty, -B[\cap D_f)), f(x) > A.$$

On dit que f a pour limite *$-\infty$ quand x tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) si*

$$\forall A > 0, \exists B > 0; \forall x \in]B, +\infty[\cap D_f \text{ (resp. }]-\infty, -B[\cap D_f)), f(x) < -A.$$

Remarque. Il est possible de réécrire la définition de $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ à l'aide de voisinages : pour tout voisinage U de l, il existe un voisinage V de x_0 tel que pour tout $x \in V \cap D_f$, $f(x) \in U$.

En particulier, si $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ existe, alors $l \in \overline{f(D_f)}$.

Exemple 1. On considère une fonction f définie sur un voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$ et telle que f est localement constante au voisinage de x_0, c'est-à-dire qu'il existe V voisinage de x_0 et $c \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in V$, $f(x) = c$. Montrons qu'alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = c$: **soit** $\varepsilon > 0$**.** En prenant $\eta > 0$ tel que $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\subset V$, on a **pour tout** $\mathbf{x} \in]\mathbf{x_0} - \eta, \mathbf{x_0} + \eta[$,

$$|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{c}| = |c - c| = 0 < \varepsilon.$$

Exemple 2. Montrons que $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$ ($f(x) = x^2$, $D_f = \mathbb{R}$, $x_0 = 2$, $l = 4$) : **soit** $\varepsilon > 0$**.** En posant $\eta = \min(\varepsilon/5, 1)$, on a **pour tout** $\mathbf{x} \in]\mathbf{2} - \eta, \mathbf{2} + \eta[$,

$$|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{4}| = |x^2 - 4| = |x-2||x+2| < \eta(|x| + 2) < \frac{\varepsilon}{5} \cdot 5 = \varepsilon.$$

Exemple 3. Montrons que $\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ ($f(x) = \ln(x)$, $D_f = \mathbb{R}_+^*$, $x_0 = 0$, $l = -\infty$) : **soit** $\mathbf{A} > \mathbf{0}$**.** En posant $\eta = \exp(-A) > 0$, on a **pour tout** $\mathbf{x} \in]-\eta, \eta[\cap]\mathbf{0}, +\infty[$,

$$\ln(\mathbf{x}) < \ln(\eta) = -\mathbf{A}.$$

En fait, il y a un moyen plus simple de déterminer des limites de fonctions en utilisant le travail déjà fait sur les suites :

Théorème 4.6 (critère séquentiel pour les limites de fonctions) *On considère une fonction f définie sur un ensemble non vide D_f de $\mathbb{R}$, $l \in \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ et $x_0 \in \overline{D_f}$ ($x_0 \in \overline{D_f} \cup \{-\infty, +\infty\}$ lorsque D_f contient des intervalles du type $[M, +\infty[$ ou $]-\infty, -M]$, $M \in \mathbb{R}$). On a l'équivalence*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \Longleftrightarrow \textit{ pour toute suite } u \textit{ à valeurs dans } D_f \textit{ et qui tend vers } x_0, \ \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = l.$$

Preuve. A titre d'exemple, on traite le cas où l et x_0 sont des réels. Les autres cas se traitent de manière analogue.
1. Montrons l'implication $\Longrightarrow$: on suppose que f tend vers l lorsque x tend vers x_0. On considère une suite u à valeurs dans D_f convergeant vers x_0 et on souhaite montrer que la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l.

Soit $\varepsilon > 0$**.** Comme $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$, on prend $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap D_f$, $|f(x) - l| < \varepsilon$. De plus, comme $\lim_{n\to+\infty} u_n = x_0$, soit $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n - x_0| < \eta$. Alors **pour tout** $\mathbf{n} \geq \mathbf{N}$, $u_n \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap D_f$ donc $|\mathbf{f}(\mathbf{u_n}) - \mathbf{l}| < \varepsilon$. En conclusion, on vient de montrer (voir les expressions en gras) que $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l.

2. Montrons l'implication $\Longleftarrow$: on suppose que pour toute suite u convergeant vers x_0 et à valeurs dans D_f, $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l. Montrons qu'alors f a pour limite l quand $x \to x_0$.

Par l'absurde, supposons que f ne tend pas vers l quand $x \to x_0$. Cela signifie qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\eta > 0$, il existe $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap D_f$ tel que $|f(x) - l| > \varepsilon$. En particulier, pour $\eta = 1/n$, $n \in \mathbb{N}^*$. soit $u_n \in]x_0 - 1/n, x_0 + 1/n[\cap D_f$ tel que $|f(u_n) - l| > \varepsilon$.

Comme $x_0 - 1/n < u_n < x_0 + 1/n$ pour tout $n \geq 1$, la suite u converge vers x_0 par le théorème de comparaison des trois suites. De plus, $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut converger vers l car sinon, on aurait à partir d'un certain rang $|f(u_n) - l| < \varepsilon$, ce qui est exclu. En conclusion, on a abouti à une absurdité donc f tend vers l quand x tend vers x_0.$\square$

Remarque. Le critère séquentiel permet d'éviter de passer aux "ε et η" pour déterminer des limites de fonctions. Par exemple, pour justifier que $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$, on peut immédiatement dire que si u est une suite convergeant vers 2, alors $(u_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 4 par théorème sur les limites de produits de suites.

Par ailleurs, en exploitant cette relation entre limites de fonctions et limite de suite, on peut montrer des théorèmes analogues à ceux déjà énoncés pour les suites. On se contentera de les citer : unicité de la limite, opérations classiques sur les limites (limite d'une somme, d'un produit de fonctions, de l'inverse d'une fonction), théorème de comparaison des limites et théorème des trois fonctions...

Proposition 4.7 (composées de limites) *On considère f et g deux fonctions définies sur D_f et D_g respectivement et telles que $g(D_g) \subset D_f$. On suppose l'existence de $x_0 \in \overline{D_g}$, $l \in \overline{D_f}$ et $l' \in \mathbb{R}$ tels que*

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = l \text{ et } \lim_{y \to l} f(y) = l'.$$

Alors la fonction $f \circ g$ a pour limite l' lorsque x tend vers x_0.

Preuve. On montre la proposition lorsque x_0, l et l' sont finis mais la méthode serait analogue dans les cas restants.

Soit $\varepsilon > 0$. La limite de f en l étant l', on choisit $\eta_1 > 0$ tel que pour tout $y \in]l - \eta_1, l + \eta_1[\cap D_f$, on ait $|f(y) - l'| < \varepsilon$. Comme g tend vers l lorsque x tend vers x_0, soit $\eta_2 > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \eta_2, x_0 + \eta_2[\cap D_g$, on ait $|g(x) - l| < \eta_1$. Alors en posant $\eta = \eta_2$, **pour tout** $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap D_g$, $g(x) \in]l - \eta_1, l + \eta_1[\cap D_f$ donc

$$|(\mathbf{f} \circ \mathbf{g})(\mathbf{x}) - l'| = |f(g(x)) - l'| < \varepsilon. \square$$

Exemple. Comme $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{y \to 0} \exp(y) = 1$, on a $\lim_{x \to +\infty} \exp\left(\frac{1}{x}\right) = 1$.

Définition 4.8 (limites à gauche, à droite) *On considère une fonction f définie sur un ensemble non vide D_f de $\mathbb{R}$ ainsi que $x_0 \in \overline{D_f}$. On dit que f a pour* limite à gauche *(resp.* à droite*) $l \in \mathbb{R}$ en x_0 si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0; \forall x \in]x_0 - \eta, x_0[\cap D_f \textit{ (resp. } x \in]x_0, x_0 + \eta[\cap D_f), |f(x) - l| < \varepsilon.$$

On note $f(x_0^-)$ (resp. $f(x_0^+)$) la limite à gauche (resp. à droite) de f en x_0 lorsqu'elle existe.

Remarques. On peut définir de même les limites infinies à gauche et à droite. On peut de plus énoncer un critère séquentiel pour les limites à gauche (resp. à droite) : f a pour limite à gauche (resp. à droite) l en x_0 si et seulement si pour toute suite u croissante (resp. décroissante), à valeurs dans D_f et convergeant vers x_0, $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers l.

Exemple. La fonction E, dite "partie entière", est définie sur $\mathbb{R}$ par la phrase "pour tout $x \in \mathbb{R}$, $E(x)$ est l'unique entier relatif vérifiant $E(x) \leq x < E(x) + 1$". Montrons que E est limitée à gauche et à droite en tout point.

Si $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$, soit $n \in \mathbb{Z}$ tel que $x \in]n, n+1[$. En particulier, pour $\eta = \min(x-n, n+1-x) > 0$, on a $]x - \eta, x + \eta[\subset]n, n+1[$ donc la fonction E est constante sur cet intervalle et vaut n. Par conséquent, $E(x^+) = E(x^-) = E(x) = n$.

Si $n \in \mathbb{Z}$, alors pour tout $x \in]n-1, n[$, $E(x) = n-1$, c'est-à-dire que la fonction E est localement constante à gauche de n et vaut $(n-1)$. Donc $E(n^-) = n - 1$. Enfin, E est de même localement constante à droite de n et vaut n donc $E(n^+) = E(n) = n$.

4.1.2 Fonctions monotones

Proposition 4.9 (limites d'une fonction croissante) *On considère $a < b \in [-\infty, +\infty]$ et une fonction croissante $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$. Alors $f(a^+)$, $f(b^-)$ existent et sont tels que*

$$f(a^+) = \begin{cases} \inf\{f(x); x \in]a, b[\} & \textit{si } f \textit{ est minorée} \\ -\infty & \textit{sinon} \end{cases}$$

et

$$f(b^-) = \begin{cases} \sup\{f(x); x \in]a, b[\} & \textit{si } f \textit{ est majorée} \\ +\infty & \textit{sinon} \end{cases}$$

De plus, pour tout $x_0 \in]a, b[$, $f({x_0}^-)$ et $f({x_0}^+)$ existent et pour tous $a < y_0 < x_0 < z_0 < b$, on a l'inégalité

$$f({y_0}^+) \leq f({x_0}^-) \leq f(x_0) \leq f({x_0}^+) \leq f({z_0}^-).$$

Preuve. On montre tout d'abord que $f(a^+)$ existe.

1er cas : l'ensemble $\{f(x); x \in]a, b[\}$ est minoré. Alors comme il est non vide, il possède une borne inférieure que l'on note $m \in \mathbb{R}$. Il reste à montrer que $f(a^+) = m$. **Soit** $\varepsilon > 0$**.** Par propriété de la borne inférieure, on choisit $x_\varepsilon \in]a, b[$ tel que $m \leq f(x_\varepsilon) < m + \varepsilon$. En particulier, en prenant $\eta = (x_\varepsilon - a)$, on a par croissance de f, **pour tout $\mathbf{x} \in]\mathbf{a}, \mathbf{a} + \eta[$,**

$$m \leq f(x) \leq f(a + \eta) = f(x_\varepsilon) < m + \varepsilon \text{ donc } |\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{m}| < \varepsilon.$$

2ème cas : l'ensemble $\{f(x); x \in]a, b[\}$ n'est pas minoré. On montre alors que $f(a^+) = -\infty$. En effet, **soit $\mathbf{A} > 0$.** Puisque f n'est pas minorée, il existe $x_A \in]a, b[$ tel que $f(x_A) < -A$. Par conséquent, en utilisant la croissance de f et en posant $\eta = x_A - a$, on a **pour tout $\mathbf{x} \in]\mathbf{a}, \mathbf{a} + \eta[$,**

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq f(a + \eta) = f(x_A) < -\mathbf{A}.$$

De même, on montre le résultat pour $f(b^-)$. L'inégalité finale de la proposition n'est qu'un corollaire de la première partie : en appliquant ce qui vient d'être fait à la restriction de f à $]x_0, b[$ et $]a, x_0[$, on a

$$f(x_0^-) = \sup\{f(x); x \in]a, x_0[\} \leq f(x_0) \leq \inf\{f(x); x \in]x_0, b[\} = f(x_0^+).\square$$

Exemple. On considère une variable aléatoire X prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors la fonction de répartition $F_X : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & [0, 1] \\ x & \longmapsto & \mathbf{P}\{X \leq x\} \end{cases}$ est croissante donc les limites à gauche et à droite de F_X existent en tout point de $\mathbb{R}$. Plus précisément, il est possible de montrer que la limite à droite en x_0 est $F_X(x_0)$. En outre, F_X tend vers 0 quand x tend vers $-\infty$ et vers 1 quand x tend vers $+\infty$.

4.1.3 Fonctions équivalentes. Notations de Landau

Définition 4.10 (négligeabilité, équivalence) *Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur D_f et D_g et $x_0 \in \overline{D_f} \cap \overline{D_g}$ (x_0 éventuellement infini).*

(1) On dit que f est négligeable *devant g au voisinage de x_0 s'il existe un voisinage V de x_0 (un intervalle $[M,+\infty[$ ou $]-\infty,-M]$, $M>0$ si x_0 est infini) et une fonction $\eta : V\cap D_f\cap D_g \longrightarrow \mathbb{R}$ de limite nulle en x_0 telle que $f(x)=\eta(x)g(x)$ pour tout $x\in V\cap D_f\cap D_g$. On le note*

$$f(x) \underset{x\to x_0}{=} o(g(x)).$$

(2) On dit que f est équivalente *à g au voisinage de x_0 s'il existe un voisinage V de x_0 et une fonction $\theta : V\cap D_f\cap D_g \longrightarrow \mathbb{R}$ de limite 1 en x_0 telle que $f(x)=\theta(x)g(x)$ pour tout $x\in V\cap D_f\cap D_g$. On le note*

$$f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x).$$

Remarques. Lorsque g ne s'annule pas sur un voisinage de x_0, on a

$$f(x) \underset{x\to x_0}{=} o(g(x)) \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0 \text{ et } f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x) \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=1.$$

En particulier,

$$f(x) \underset{x\to x_0}{=} o(1) \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)=0 \text{ et } f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} l \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)=l \quad \textbf{si } l\boldsymbol{\neq 0}.$$

On dispose d'un critère séquentiel qui va nous permettre de prolonger aux fonctions tous les résultats sur les équivalences et négligeabilités de suites.

Proposition 4.11 (critère séquentiel pour la négligeabilité et l'équivalence) *Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur D_f et D_g et $x_0\in[-\infty,+\infty]$. On a l'équivalence*

$$f(x) \underset{x\to x_0}{=} o(g(x)) \Longleftrightarrow$$
$$\text{pour toute suite } u \text{ à valeurs dans } D_f\cap D_g \text{ et convergeant vers } x_0,\ f(u_n) \underset{n\to+\infty}{=} o(g(u_n)),$$

ainsi que

$$f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} (g(x)) \Longleftrightarrow$$
$$\text{pour toute suite } u \text{ à valeurs dans } D_f\cap D_g \text{ et convergeant vers } x_0,\ f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} g(u_n).$$

Remarque. On obtient ainsi les analogues fonctionnels de toutes les propriétes obtenues sur les o et $\sim$ pour les suites. On ne les rappellera pas ici mais on les utilisera à partir de maintenant.
Exemples. Négligeabilités classiques : pour tous $0<\alpha<\beta$ et $a>0$, on a

$$\ln(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(x^\alpha\right), \quad x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o\left(a^x\right) \text{ et } x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o\left(x^\beta\right).$$

Equivalences classiques : si $\alpha\in\mathbb{R}^*$, on a

$$\ln(1+x) \underset{x\to0}{\sim} x, \quad e^x-1 \underset{x\to0}{\sim} x, \quad (1+x)^\alpha-1 \underset{x\to0}{\sim} \alpha x,$$

$$\sin(x) \underset{x\to0}{\sim} x, \quad 1-\cos(x) \underset{x\to0}{\sim} \frac{x^2}{2}.$$

4.2 Continuité

4.2.1 Continuité locale, globale

Définition 4.12 (continuité en un point) *On considère une fonction f définie sur D_f et un point $x_0 \in D_f$. On dit que f est* continue en x_0 *si f a une limite en x_0. Dans ce cas, cette limite ne peut être que $f(x_0)$.*

Preuve. Soit l la limite de f en x_0. Si $l \in \mathbb{R}$, soit $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap D_f$, $|f(x) - l| < \varepsilon$. En particulier, on peut prendre $x = x_0$ et on obtient alors que $|f(x_0) - l| < \varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que $f(x_0) = l$. Par ailleurs, la limite de f en x_0 ne peut être infinie : par l'absurde, si $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, on prend $A = f(x_0)$ et $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap D_f$, $f(x) > f(x_0) = A$. En particulier pour $x = x_0$, on débouche sur une absurdité.□

Les deux propositions suivantes fournissent des critères immédiats de continuité :

Proposition 4.13 (critère séquentiel) *On considère une fonction f définie sur D_f et un point $x_0 \in D_f$. f est continue en x_0 si et seulement si pour toute suite u convergeant vers x_0 et à valeurs dans D_f, $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $f(x_0)$.*

Proposition 4.14 *On considère une fonction f définie sur D_f et un point $x_0 \in \overset{\circ}{D}_f$. f est continue en x_0 si et seulement si $f(x_0^-)$, $f(x_0^+)$ existent et $f(x_0^-) = f(x_0^+) = f(x_0)$.*

Remarque. Il existe plusieurs types de discontinuité :

1. $f(x_0^+)$ et $f(x_0^-)$ existent et sont égales mais sont différentes de $f(x_0)$. C'est le cas par exemple en $x_0 = 0$ lorsque $f(x) = 1$ pour tout $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.
2. *Discontinuité de première espèce :* $f(x_0^-)$ et $f(x_0^+)$ existent mais diffèrent. C'est le cas par exemple en $x_0 = k \in \mathbb{Z}$ lorsque f est la fonction partie entière E.
3. *Discontinuité de seconde espèce :* $f(x_0^-)$ ou $f(x_0^+)$ n'existe pas. C'est le cas par exemple en $x_0 = 0$ lorsque $f(x) = \sin(1/x)$ si $x > 0$ et $f(x) = 0$ si $x \leq 0$.

En effet, montrons que f n'a pas de limite à droite en 0 : considérons les suites u et v définies par $u_n = 1/(2n\pi)$ et $v_n = 1/((\pi/2) + 2n\pi)$ pour $n \geq 1$. u et v sont deux suites qui décroissent vers zéro. De plus, $f(u_n) = 0$ et $f(v_n) = 1$ pour tout $n \geq 1$ donc d'après le critère séquentiel, f n'a pas de limite à droite en 0.

Exemple. On considère $f = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur 1 en tous les rationnels et 0 en tous les irrationnels. Montrons que f n'est continue en aucun point.

En effet, considérons $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et prenons une suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de rationnels convergeant vers x (cette suite existe par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(r_n) = 1$ mais $f(x) = 0$ donc $(f(r_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers $f(x)$. Par conséquent, f n'est pas continue en x. De même, on montre que f n'est pas continue en les points rationnels en utilisant la densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

Définition 4.15 (continuité globale) *On considère une fonction f définie sur un ensemble non vide D_f. f est dite* continue *sur D_f si f est continue en tout point de D_f.*

Exemple. On énonce sans démonstration les résultats classiques de continuité : les somme, produit, rapport, composée (quand ils existent) de deux fonctions continues (en un point ou sur un ensemble) sont continues. De même, les fonctions classiques (polynômes, exponentielle, logarithme, fonctions trigonométriques et hyperboliques, réciproques de ces fonctions) sont continues.

4.2.2 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 4.16 (valeurs intermédiaires, énoncé 1) *L'image continue d'un intervalle de $\mathbb{R}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$ et toute fonction continue f définie sur I, $f(I) = \{f(x); x \in I\}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.*

Théorème 4.17 (valeurs intermédiaires, énoncé 2) *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors pour tout $u \in [f(a), f(b)]$ (ou $[f(b), f(a)]$), il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = u$.*

Preuve. On revient à la définition d'un intervalle : soient $f(x) < f(y)$ $(x, y \in I)$ deux éléments de $f(I)$ et considérons $u \in]f(x), f(y)[$. Il faut montrer que $u \in f(I)$, c'est-à-dire qu'il existe $z \in I$ tel que $f(z) = u$.

On suppose par exemple que $x < y$. Alors considérons

$$z = \sup A_u = \sup\{t \in [x,y]; f(t) \leq u\}.$$

z existe comme borne supérieure de l'ensemble A_u, non vide (contenant x) et majoré (par y).

De plus, comme z est le plus petit des majorants de A_u, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $t \in [x,y]$ tel que $f(t) \leq u$ et $z - \varepsilon < t \leq z$. En particulier, pour $\varepsilon = 1/n$, $n \in \mathbb{N}^*$, soit $t_n \in [x,y]$ tel que $f(t_n) \leq u$ et $z - (1/n) < t_n \leq z$. Ainsi, $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers z donc par continuité de f en z, $(f(t_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $f(z)$ et puisque $f(t_n) \leq u$ pour tout $n \geq 1$, on obtient que

$$f(z) \leq u.$$

Par ailleurs, comme z est majorant de A_u, tout $t \in]z,y]$ satisfait $f(t) > u$. En passant à la limite quand t tend vers z par valeurs supérieures, par continuité de f en z, on a $f(z^+) = f(z)$ donc

$$f(z) \geq u.$$

En conclusion, on obtient $f(z) = u$, ce qui est précisément ce que l'on souhaitait démontrer.□

Remarque. Avec une démonstration analogue, on peut prolonger le théorème aux fonctions continues définies sur $]a,b[$ $(a < b \in [-\infty, +\infty])$ telles que $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ et $\lim_{x\to b} f(x) = \beta$ existent : pour tout $u \in]\alpha, \beta[$ (ou $]\beta, \alpha[$), il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = u$.

Exemple. L'application f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 1$ est continue en tant que polynôme. Montrons que f admet trois zéros distincts dans $\mathbb{R}$. En effet, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $f(0) = 1 > 0$ et $f(1) = -1 < 0$ donc par le théorème des valeurs intermédiaires, f s'annule au moins une fois sur l'intervalle $]-\infty, 0[$, au moins une fois sur l'intervalle $]0,1[$ et au moins une fois sur l'intervalle $]1, +\infty[$. De plus f étant un polynôme de degré 3, f s'annule au plus trois fois. En conclusion, f s'annule exactement trois fois sur $\mathbb{R}$.

Proposition 4.18 (bijections continues) *On considère un intervalle non vide I et une fonction continue $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Alors on a l'équivalence suivante :*

$$f \text{ est injective} \iff f \text{ est strictement monotone.}$$

Lorsque f est injective, la fonction réciproque $f^{-1} : f(I) \longrightarrow I$ est aussi continue. On dit alors que f est un homéomorphisme.

Preuve. 1. Montrons l'implication $\Longleftarrow$: on suppose f strictement monotone (par exemple, strictement croissante) et on cherche à montrer que f est injective.

Soient $x \neq y$. Si par exemple $x < y$, alors par stricte croissance de f, on a $f(x) < f(y)$ donc $f(x) \neq f(y)$. f est donc injective.

2. Réciproquement, montrons l'implication $\Longrightarrow$: on suppose f injective et on cherche à montrer que f est strictement monotone. Par l'absurde, si f n'est pas strictement monotone, alors il existe par exemple $x < y < z \in I$ tels que $f(x) < f(y)$ et $f(y) > f(z)$. En particulier, si $u \in]\max(f(x), f(z)), f(y)[$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c_1 \in]x, y[$ tel que $f(c_1) = u$ et il existe $c_2 \in]y, z[$ tel que $f(c_2) = u$. Par conséquent, on a $f(c_1) = f(c_2)$ mais $c_1 \neq c_2$, ce qui est absurde.

3. il reste à montrer que si f est injective et continue, alors f^{-1} est continue. Supposons par exemple f (et donc f^{-1}) strictement croissante. Par l'absurde, si f^{-1} n'est pas continue, il existe $x_0 \in I$ tel que $f^{-1}(x_0^-) < f^{-1}(x_0)$ ou $f^{-1}(x_0^+) > f^{-1}(x_0)$. On peut par exemple supposer qu'on est dans le premier cas et on choisit $u \in]f^{-1}(x_0^-), f^{-1}(x_0)[$. Alors si $y < x_0 \in I$, par propriété des limites des fonctions croissantes, on a $f^{-1}(y) < f^{-1}(x_0^-) < u$ et si $y \geq x_0$, on a $f^{-1}(y) \geq f^{-1}(x_0) > u$. Par conséquent, il n'existe aucun $y \in f(I)$ tel que $f^{-1}(y) = u$, ce qui est absurde puisque $f^{-1}(f(u)) = u$. En conclusion, f^{-1} est continue sur $f(I)$.□

Exemples. La fonction sin : $[-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow [-1, 1]$ est un homéomorphisme croissant d'inverse continue arcsin : $[-1, 1] \longrightarrow [-\pi/2, \pi/2]$. De même, la fonction cos : $[0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$ est un homéomorphisme croissant d'inverse continue arccos : $[-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$.

4.2.3 Fonctions continues sur un segment

Théorème 4.19 (fonctions continues sur un segment, énoncé 1) *L'image continue d'un segment est un segment, c'est-à-dire pour tout segment $[a, b]$, $a < b$) et toute fonction continue $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f([a, b])$ est un segment.*

Théorème 4.20 (fonctions continues sur un segment, énoncé 2) *Toute fonction f continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.*

Preuve. 1. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, $f([a, b])$ est un intervalle.

2. De plus, $f([a, b])$ est borné : en effet, on procède par l'absurde. Si $f([a, b])$ n'est pas borné, on peut supposer par exemple que $f([a, b])$ n'est pas majoré. Cela signifie

$$\forall M > 0, \exists x \in [a, b]; f(x) > M.$$

En prenant $M = n$, $n \in \mathbb{N}$, on construit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $[a,b]$ telle que $f(x_n) > n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En particulier, $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = +\infty$. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un certain $x \in [a,b]$. D'après le critère séquentiel pour la continuité, $(f(x_{\varphi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ doit tendre vers $f(x)$. Or c'est une sous-suite de $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers $+\infty$. Par conséquent, $(f(x_{\varphi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ tend à la fois vers $+\infty$ et vers $f(x)$, ce qui est absurde. En conclusion, $f([a,b])$ est un intervalle borné, donc de la forme $[c,d]$, $]c,d[$, $[c,d[$ ou $]c,d]$ avec $c \le d$.

3. L'intervalle-image ne peut être que $[c,d]$. En effet, supposons par l'absurde que c n'est pas dans $f([a,b])$, c'est-à-dire qu'on est dans le cas $f([a,b]) =]c,d]$ ou $]c,d[$. Pour n assez grand, $(c+\frac{1}{n}) \in f([a,b])$ donc il existe $x_n \in [a,b]$ tel que $f(x_n) = c+\frac{1}{n}$. En particulier, $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = c$. Or d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un certain $x \in [a,b]$. D'après le critère séquentiel pour la continuité, il vient que $\lim_{n\to+\infty} f(x_{\varphi(n)}) = f(x)$. En conclusion, $f(x) = c$ ce qui montre que $c \in f([a,b])$. De même, on montre que $d \in f([a,b])$, c'est-à-dire que $f([a,b]) = [c,d]$.□

Exemple. La fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par l'expression

$$f(x) = \sin(\ln(x+1)) \cdot (x^5 + x)\exp(-x^2 + x), \quad x \ge 0,$$

possède un maximum sur $\mathbb{R}_+$. On peut justifier cela sans faire appel à la notion de dérivée (qui serait d'ailleurs assez pénible à calculer !) : on remarque tout d'abord que f prend des valeurs strictement positives (par exemple, $f(e^{\pi/2} - 1) > 0$). De plus, f est de limite nulle en $+\infty$ donc pour $\varepsilon = f(e^{\pi/2} - 1)$, soit $B > 0$ tel que $|f(x)| < \varepsilon$ pour tout $x \in [B, +\infty[$.

Par ailleurs, en posant $B' = \max(B, e^{\pi/2} - 1)$, la fonction f est continue sur le segment $[0, B']$ donc possède un maximum sur $[0, B']$ qui est nécessairement supérieur à $f(e^{\pi/2} - 1)$ et donc supérieur à tout $f(x)$ pour $x \ge B'$. En conclusion, il s'agit d'un maximum global de la fonction f sur tout $\mathbb{R}_+$.

4.3 Uniforme continuité

4.3.1 Définition et théorème de Heine

Définition 4.21 (uniforme continuité) *On considère une fonction f définie sur un ensemble non vide D_f. On dit que f est* uniformément continue *sur D_f si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0; \forall x, y \in D_f, |x - y| < \eta \Longrightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

Remarque. L'uniforme continuité est une notion “globale” qui signifie qu'à $\varepsilon > 0$ fixé, le η choisi dans la définition de la limite de f en x est le même pour tous les x de l'ensemble de définition. Elle implique bien évidemment la continuité en tout point au sens classique mais c'est une notion plus forte au sens où il existe des fonctions continues en tout point de leur ensemble de définition mais non uniformément continues.

Proposition 4.22 *Toute fonction uniformément continue est continue.*

Exemple 1. La fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[1, +\infty[$: en effet, soit $\varepsilon > 0$. Alors en prenant $\eta = 2\varepsilon$, pour tout $x \in [1, +\infty[$ et tout $y \in]x - \eta, x + \eta[\cap [1, +\infty[$, on a

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x - y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq \frac{1}{2}|x - y| < \varepsilon,$$

car $(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \geq \sqrt{1} + \sqrt{1} = 2$.
Exemple 2. La fonction $f : x \longmapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $[0, +\infty[$. Il faut montrer pour cela le contraire de la définition d'uniforme continuité, soit

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0; \exists x, y \in [0, +\infty[, \text{ tels que } |x - y| < \eta \text{ et } |x^2 - y^2| > \varepsilon.$$

Prenons $\varepsilon > 0$ et fixons $\eta > 0$. Alors pour $x = \varepsilon/\eta$ et $y = x + \eta/2$, on a

$$|x^2 - y^2| = |x - y|(x + y) = \frac{\eta}{2}(x + y) > \frac{\eta}{2} \cdot 2x \geq \varepsilon.$$

On vient ainsi de montrer que la fonction carré n'est pas uniformément continue sur $[0, +\infty[$.

Théorème 4.23 (théorème de Heine) *Toute fonction continue sur un segment est uniformément continue.*

Preuve. Par l'absurde, on suppose l'existence d'une fonction continue f sur un segment K qui n'est pas uniformément continue, c'est-à-dire

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0; \exists x, y \in K \text{ tels que } |x - y| < \eta \text{ et } |f(x) - f(y)| > \varepsilon.$$

En particulier, pour $\eta = 1/n$, $n \in \mathbb{N}^*$, soient $x_n \in K$ et $y_n \in K$ tels que $|x_n - y_n| < 1/n$ et $|f(x) - f(y)| > \varepsilon$. Comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à valeurs dans le segment K, soit $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite convergeant vers $l \in K$. De même, $(y_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à valeurs dans le segment K, donc soit $(y_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite qui converge vers $l' \in K$. En tant que sous-suite de $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, la suite $(x_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.

En utilisant la continuité de f en l et l' ainsi que l'inégalité valable pour tout n, $|f(x_{\varphi\circ\psi(n)}) - f(y_{\varphi\circ\psi(n)})| > \varepsilon$, on a alors que

$$|f(l) - f(l')| \geq \varepsilon \tag{4.1}$$

tandis que l'inégalité $|x_{\varphi\circ\psi(n)}) - y_{\varphi\circ\psi(n)})| < 1/n$ implique que

$$|l - l'| = 0 \text{ soit } l = l'. \tag{4.2}$$

Les résultats (4.1) et (4.2) fournissent une absurdité donc f est uniformément continue.□
Exemple. D'après le théorème de Heine, la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0, 1]$ car continue sur le segment $[0, 1]$. De plus, comme on l'a vu, la fonction racine carrée est uniformément continue sur $[1, +\infty[$. Par conséquent, elle est uniformément continue sur tout $\mathbb{R}_+$ (le η qui convient sur tout $\mathbb{R}_+$ est le plus petit des deux η obtenus pour l'uniforme continuité sur $[0, 1]$ et $[1, +\infty[$).

4.3.2 Fonctions lipschitziennes

Définition 4.24 (fonctions lipschitziennes) *On considère une fonction f définie sur un ensemble non vide D_f et $\lambda > 0$. On dit que f est* lipschitzienne *de rapport λ si*

$$|f(x) - f(y)| \leq \lambda |x - y| \quad \forall x, y \in D_f.$$

Exemple 1. La fonction $\sqrt{\cdot}$ est lipschitzienne de rapport $1/2$ sur l'intervalle $[1, +\infty[$. En effet, pour tous $x, y \in [1, +\infty[$,

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x-y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq \frac{1}{2}|x - y|.$$

En revanche, elle n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$. En effet, supposons par l'absurde l'existence de $\lambda > 0$ tel que

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x-y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq \lambda |x - y|$$

donc pour tous $x \neq y \geq 0$, $(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \geq \lambda^{-1}$. Ceci est absurde pour $x = 1/(16\lambda^2)$, $y = 1/(4\lambda^2)$ (par exemple) car alors $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3/(4\lambda)$.
Exemple 2. La fonction $f : x \longmapsto \sin(x)$ est lipschitzienne de rapport 1 sur $\mathbb{R}$. En effet, si $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|\sin(x) - \sin(y)| = 2\left|\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\right|\left|\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right| \leq 2\left|\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right|.$$

De plus, en supposant connue l'inégalité $|\sin(u)| \leq |u|$ pour tout $u \in \mathbb{R}$ (la montrer par étude de fonctions), on obtient

$$|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Proposition 4.25 *Toute fonction lipschitzienne est uniformément continue.*

Preuve. On considère une fonction f définie sur un ensemble non vide D_f, $\lambda > 0$ tels que $|f(x) - f(y)| \leq \lambda |x - y|$ pour tous $x, y \in D_f$.

Soit $\varepsilon > 0$. Pour $\eta = \varepsilon/\lambda$, on a pour tout $x, y \in D_f$ tels que $|x - y| < \eta$, $|f(x) - f(y)| \leq \lambda |x - y| < \varepsilon.\square$
Remarque Il existe des fonctions uniformément continues qui ne sont pas lipschitziennes, ainsi la racine carrée sur $\mathbb{R}_+$.

Théorème 4.26 (théorème du point fixe) *On considère un intervalle fermé I et une fonction $f : I \longrightarrow I$ lipschitzienne de rapport $\lambda \in]0, 1[$. Alors f possède un unique point fixe (c'est-à-dire un point $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) = x_0$) et toutes les suites récurrentes définies par $u_{n+1} = f(u_n)$, $n \geq 1$, convergent vers ce point fixe.*

Preuve. 1. On montre tout d'abord que f a au plus un point fixe : en effet, si x_0 et y_0 vérifient $f(x_0) = x_0$, $f(y_0) = y_0$ et $x_0 \neq y_0$, alors

$$|f(x_0) - f(y_0)| = |x_0 - y_0| \leq \lambda |x_0 - y_0| < |x_0 - y_0|,$$

ce qui est absurde.
2. On montre l'existence du point fixe : on fixe $a \in I$ et on considère la suite u définie par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|u_{n+1} - u_n| = |f(u_n) - f(u_{n-1})| \leq \lambda |u_n - u_{n-1}|.$$

Par récurrence sur n (on applique l'inégalité ci-dessus en “cascade”), on obtient pour tout $n \geq \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1} - u_n| \leq \lambda^n |u_1 - a|.$$

En particulier, la série de terme général $(u_{n+1} - u_n)$ est absolument convergente donc convergente vers un certain réel l_0. Cela implique en particulier (par méthode de “téléscopage”)que

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = \lim_{n \to +\infty} (u_n - u_0) = l_0.$$

Par conséquent, u converge vers $l = (l_0 + a) \in I$ quand n tend vers l'infini. Il reste à vérifier que $l = f(l)$: par continuité de f en l, on a $\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = f(l)$ et d'autre part $\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = \lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = l$. En conclusion, $l = f(l)$.$\square$

Chapitre 5

Dérivation et formules de Taylor

Dans tout ce chapitre, les fonctions considérées sont à valeurs réelles.

5.1 Définition et propriétés

5.1.1 Dérivée en un point, fonction dérivée

Définition 5.1 (dérivée en un point, fonction dérivée) *On considère une fonction f définie sur un ensemble non vide D_f contenant x_0 tel que $x_0 \in \overline{D_f \setminus \{x_0\}}$. On dit que f admet une* dérivée *en x_0 si la fonction $\left\{\begin{array}{lcl} D_f \setminus \{x_0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \end{array}\right.$ admet une limite finie l en x_0. On note alors $l = f'(x_0)$.*

Remarque. Lorsque la fonction ci-dessus admet une limite l à gauche (resp. à droite) en x_0, on parle de dérivée à gauche (resp. à droite) en x_0 et on la note $f'_g(x_0)$ (resp. $f'_d(x_0)$). En particulier, f admet une dérivée en x_0 si et seulement si f admet une dérivée à gauche et une dérivée à droite et si $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.

Exemple 1. *$f'_g(x_0)$ et $f'_d(x_0)$ existent mais diffèrent.* On considère par exemple la fonction valeur absolue $f(x) = |x|$ en $x_0 = 0$. On a alors $f'_g(x_0) = -1$ et $f'_d(x_0) = +1$. f n'est donc pas dérivable en $x_0 = 0$.

Exemple 2. *$f'_g(x_0)$ ou $f'_d(x_0)$ est infini.* On considère $f(x) = \sqrt{|x|}$. Alors

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

Par conséquent, la limite du taux d'accroissement à droite de 0 est infinie et il en est de même à gauche. f n'est donc pas dérivable en $x_0 = 0$.

Exemple 3. *$f'_g(x_0)$ ou $f'_d(x_0)$ n'existe pas.* On considère

$$f(x) = \left\{\begin{array}{ll} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{array}\right.$$

Alors $f'_g(0) = 0$ tandis que la dérivée à droite en zéro n'existe pas. En effet, le taux d'accroissement à droite vaut si $x > 0$, $(f(x) - f(0))/(x - 0) = \sin(1/x)$ et on a déjà montré par critère séquentiel que $\sin(1/x)$ n'a pas de limite en 0 (voir la remarque qui suit la proposition 4.14). En conclusion, f n'est pas dérivable en $x_0 = 0$.

Proposition 5.2 *On considère une fonction f définie sur un ensemble non vide D_f et $x_0 \in D_f$. Si f est dérivable en x_0 (resp. dérivable à gauche, dérivable à droite), alors f est continue en x_0 (resp. continue à gauche, continue à droite).*

Preuve. On suppose f dérivable en x_0 et on note

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) & \text{si } x \in D_f \setminus \{x_0\} \\ 0 & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

En particulier, g est continue en x_0. De plus, on a pour tout $x \in D_f \setminus \{x_0\}$,

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)g(x), \text{ donc } \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) + 0 \cdot f'(x_0) + 0 \cdot 0 = f(x_0).$$

On vient donc de montrer que f est continue en x_0 et même que

$$f(x) \underset{x \to x_0}{=} f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + o(x - x_0).$$

C'est ce que l'on appelle le développement de Taylor-Young à l'ordre 1 de f.□

Remarque 1. Dans un repère orthonormé direct (O, I, J), la droite d'équation

$$(y = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0))$$

est appelée la tangente au point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$ à la courbe représentative de la fonction f qui a pour équation $(y = f(x), x \in D_f)$.

Remarque 2. Il existe des fonctions qui sont continues mais non dérivables. En reprenant l'exemple 3 précédent, on a vu que f n'est pas dérivable en 0. Cependant, pour tout $x > 0$,

$$|f(x)| = \left| x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x|,$$

donc par théorème de comparaison des limites, f tend vers 0 lorsque x tend vers 0 par valeurs positives. Cela signifie que f est continue en 0.

Définition 5.3 (fonctions dérivées successives) *On considère une fonction f définie sur un ensemble non vide D_f.*
(1) Si f est dérivable en tout point de D_f, on appelle fonction dérivée *de f, la fonction*

$$f' : \begin{cases} D_f & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{cases} ;$$

(2) Lorsque f' est dérivable, on appelle dérivée seconde *la fonction $f'' = (f')'$ et par récurrence, on définit la* dérivée n-ième *par $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$, $n \geq 1$ avec la convention $f^{(0)} = f$.*
(3) On note $\mathcal{C}^n(D_f, \mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, l'ensemble des fonctions définies sur D_f qui sont dérivables n fois et dont toutes les dérivées jusqu'à la n-ième sont continues. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$ *sur D_f si f est élément de l'ensemble $\mathcal{C}^n(D_f, \mathbb{R})$.*

Exemples. On rappelle que les fonctions polynômes, exponentielle, trigonométriques, hyperboliques sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, les fractions rationnelles de classe C^∞ sur leur ensemble de définition, la fonction logarithme de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

5.1.2 Opérations sur les dérivées

Proposition 5.4 *On considère $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ et f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur des ensembles D_f et D_g respectivement. Alors :*
(1) la fonction $(f+g)$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $D_f \cap D_g$ et pour tout $k \in \{0, \cdots, n\}$, pour tout $x \in D_f \cap D_g$,

$$(f+g)^{(k)}(x) = f^{(k)}(x) + g^{(k)}(x);$$

(2) La fonction $(f \cdot g)$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $D_f \cap D_g$ et pour tout $k \in \{0, \cdots, n\}$, pour tout $x \in D_f \cap D_g$, la formule suivante, dite de Leibniz, est satisfaite :

$$(f \cdot g)^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} f^{(j)}(x) g^{(k-j)}(x);$$

(3) Lorsque g ne s'annule pas sur $D_f \cap D_g$, la fonction (f/g) est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $D_f \cap D_g$ et pour tout $x \in D_f \cap D_g$,

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2};$$

(4) Lorsque $g(D_g) \subset D_f$, la fonction $(f \circ g)$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur D_g et pour tout $x \in D_g$,

$$(f \circ g)'(x) = g'(x) \cdot f'(g(x)).$$

(5) Lorsque f admet une réciproque f^{-1} et est telle que f' ne s'annule pas sur D_f, alors pour tout $y \in f(D_f)$,

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}.$$

Preuve. On démontre à titre d'exemples certains des points ci-dessus.
(2) Montrons la formule de Leibniz par récurrence sur $k \geq 1$.
•$k = 1$: on considère $x_0 \in D_f \cap D_g$. Alors pour tout $x \neq x_0 \in D_f \cap D_g$, le taux d'accroissement de $(f \cdot g)$ en x_0 vaut

$$\begin{aligned} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x_0)}{x - x_0} + \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= f(x) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + g(x_0)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \end{aligned}$$

Comme f est dérivable en x_0, f est aussi continue en x_0 donc $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ et en passant à la limite dans l'expression ci-dessus, on obtient que le taux d'accroissement de $(f \cdot g)$ en x_0 tend vers $(f(x_0)g'(x_0) + g(x_0)f'(x_0))$. En conclusion, on a bien

$$(f \cdot g)^{(1)}(x_0) = \binom{1}{0} f^{(0)}(x_0)g^{(1)}(x_0) + \binom{1}{1} f^{(1)}(x_0)g^{(0)}(x_0).$$

•$k > 1$: on suppose la formule vraie au rang $(k-1)$ et on la montre au rang k. On a pour tout $x \in D_f \cap D_g$

$$(f \cdot g)^{(k-1)}(x) = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} f^{(j)}(x) g^{(k-1-j)}(x).$$

La fonction ci-dessus est dérivable comme somme et produit de fonctions dérivables (d'après l'étape précédente $k=1$) et

$$\begin{aligned}
\left((f\cdot g)^{(k-1)}\right)'(x) &= (f\cdot g)^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{k-1}\binom{k-1}{j}\left[f^{(j)}(x)g^{(k-1-j+1)}(x)+f^{(j+1)}(x)g^{(k-1-j)}(x)\right] \\
&= \sum_{j=0}^{k-1}\binom{k-1}{j}f^{(j)}(x)g^{(k-j)}(x)+\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k-1}{j}f^{(j+1)}(x)g^{(k-(j+1))}(x) \\
&= \binom{k-1}{0}f^{(0)}(x)g^{(k-0)}(x)+\sum_{j=1}^{k-1}\binom{k-1}{j}f^{(j)}(x)g^{(k-j)}(x) \\
&\qquad +\sum_{j=1}^{k}\binom{k-1}{j-1}f^{(j)}(x)g^{(k-j)}(x),
\end{aligned}$$

cette dernière ligne étant obtenue par changement de variable dans la seconde somme ("nouveau j=ancien j +1"). En utilisant la formule du triangle de Pascal et les identités $\binom{k}{k}=\binom{k-1}{k-1}=\binom{k-1}{0}=\binom{k}{0}=1$, on obtient

$$\begin{aligned}
\left((f\cdot g)^{(k-1)}\right)'(x) &= f^{(0)}(x)g^{(k)}(x)+\sum_{j=1}^{k-1}\left(\binom{k-1}{j}+\binom{k-1}{j-1}\right)f^{(j)}(x)g^{(k-j)}(x) \\
&\qquad +\binom{k-1}{k-1}f^{(k)}(x)g^{(k-k)}(x) \\
&= \binom{k}{0}f^{(0)}(x)g^{(k)}(x)+\sum_{j=1}^{k-1}\binom{k}{j}f^{(j)}(x)g^{(k-j)}(x)+\binom{k}{k}f^{(k)}(x)g^{(0)}(x) \\
&= \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}f^{(j)}(x)g^{(k-j)}(x).
\end{aligned}$$

(4) On choisit $x_0 \in D_g$ et on considère le taux d'accroissement de $(f\circ g)$ en x_0, soit

$$\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{x-x_0}=\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{g(x)-g(x_0)}\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

Comme g est dérivable en x_0, g est aussi continue en x_0 donc $\lim_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)$. De plus, par dérivabilité de la fonction f en $g(x_0)$, on a $\lim_{y\to g(x_0)}\frac{f(y)-f(g(x_0))}{y-g(x_0)}=f'(g(x_0))$. En composant les limites, on obtient donc que

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f\circ g)(x))-(f\circ g)(x_0))}{x-x_0}=f'(g(x_0))g'(x_0),$$

c'est-à-dire que $(f\circ g)$ est dérivable en x_0, de dérivée $f'(g(x_0))g'(x_0)$.
(5) On considère $x_0\in D_f$ et le taux d'accroissement de f^{-1} en $f(x_0)$:

$$\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(f(x_0))}{y-f(x_0)}=\frac{f^{-1}(y)-x_0}{f(f^{-1}(y))-f(x_0)}.$$

De plus, lorsque y tend vers $f(x_0)$, $f^{-1}(y)$ tend vers x_0 par continuité de la fonction réciproque (d'après le résultat sur les homéomorphismes montré dans le chapitre précédent). Comme $f'(x_0) \neq 0$, l'inverse du taux d'accroissement de f en x_0 tend vers $1/(f'(x_0))$ et en composant les limites, on obtient que

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x_0)) = \lim_{y \to f(x_0)} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(x_0))}{y - f(x_0)} = \lim_{y \to f(x_0)} \frac{f^{-1}(y) - x_0}{f(f^{-1}(y)) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.\square$$

Exemples. Les fonctions trigonométriques réciproques arcsin, arccos sont définies et continues sur $[-1,1]$ et dérivables sur $]-1,1[$. De plus, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$(\arcsin)'(x) = -(\arccos)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

La fonction arctan est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(\arctan)'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

5.2 Accroissements finis

5.2.1 Théorème de Rolle

Théorème 5.5 (théorème de Rolle) *On considère $a < b$ et une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors si $f(a) = f(b)$, il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Preuve. 1er cas : f est constante sur $[a,b]$. Alors pour tout $x \in [a,b]$, $f'(x) = 0$ donc on peut prendre pour c tout réel contenu dans $]a,b[$.
2ème cas : f n'est pas constante sur $[a,b]$. Quitte à remplacer f par $(-f)$, on peut supposer qu'il existe $x \in]a,b[$ tel que $f(x) > f(a) = f(b)$. De plus, f est continue sur le segment $[a,b]$ donc est majorée et atteint sa borne supérieure qui n'est pas $f(a) = f(b)$. On considère par conséquent $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = \sup\{f(x); x \in [a,b]\}$. Le taux d'accroissement à droite de f en c, $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$, $x \in]c,b]$, est négatif car le numérateur est négatif et le dénominateur positif. De plus, ce taux d'accroissement tend vers $f'(x_0)$ car f est dérivable en c. Par conséquent, en passant à la limite quand x tend vers c par valeurs supérieures, on obtient que

$$f'(c) \leq 0.$$

De même, le taux d'accroissement à gauche de f en c, $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$, $x \in [a,c[$, est positif car les numérateur et dénominateur sont négatifs. Par conséquent, en passant à la limite quand x tend vers c par valeurs inférieures, on obtient que

$$f'(c) \geq 0.$$

En conclusion, $f'(c) = 0.\square$
Exemple. On considère une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en trois points $a < b < c$. Alors il existe $d \in]a,c[$ tel que $f''(d) = 0$. En effet, f est dérivable sur $[a,b]$ et $f(a) = f(b) = 0$.

Par conséquent, d'après le théorème de Rolle, il existe $\alpha \in]a, b[$ tel que $f'(\alpha) = 0$. De même, en appliquant le théorème de Rolle à f dérivable sur $[b, c]$, il existe $\beta \in]b, c[$ tel que $f'(\beta) = 0$. Par ailleurs, on peut appliquer le théorème de Rolle à la fonction f' qui est continue et dérivable sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$ et qui vérifie $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$. On en déduit qu'il existe $d \in]\alpha, \beta[$ tel que $(f')'(d) = f''(d) = 0$.

5.2.2 Formule des accroissements finis

Théorème 5.6 (formule des accroissements finis) *On considère $a < b$ et une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Preuve. On considère la fonction F définie sur $[a, b]$ par l'identité

$$F(x) = (f(b) - f(a))(x - b) - (b - a)(f(x) - f(a)), \quad x \in [a, b].$$

Par somme et produit de fonctions continues et dérivables, F est une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. De plus, $F(a) = F(b) = (f(b) - f(a))(a - b)$. Par conséquent, d'après le théorème de Rolle, on obtient l'existence de $c \in]a, b[$ tel que $F'(c) = 0$. Il reste à remarquer que

$$F'(c) = 0 \Longleftrightarrow (f(b) - f(a)) - (b - a)f'(c) = 0 \Longleftrightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \square$$

Remarque. L'interprétation géométrique de ce résultat est la suivante : dans un repère orthonormé direct, il existe un point de la courbe représentative de f sur $[a, b]$ tel que la tangente à la courbe en ce point est parallèle à la corde reliant les points de coordonnées $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.

Théorème 5.7 (inégalités des accroissements finis) *On considère $a < b$ et une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Si f' est bornée sur $]a, b[$, en posant $M = \sup\{|f'(x)|; x \in]a, b[\}$, on a*

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|.$$

En particulier, f est lipschitzienne si et seulement si sa dérivée est bornée.

Preuve. D'après la formule des accroissements finis, soit $c \in]a, b[$ tel que $(f(b) - f(a))/(b - a) = f'(c)$. Alors

$$\left|\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right| = |f'(c)| \leq M.$$

Il reste à montrer la réciproque de l'équivalence entre le caractère lipschitzien de f et la dérivée bornée. Supposons donc que f est lipschitzienne de rapport $\lambda > 0$ sur l'intervalle $[a, b]$. Alors si $x_0 \in]a, b[$, pour tout $x \in]a.b[\setminus\{x_0\}$,

$$\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right| \leq \lambda$$

et en passant à la limite lorsque x tend vers x_0, il vient que $|f'(x_0)| \leq \lambda$. En conclusion, la fonction f' est bornée sur $]a, b[$.$\square$

Exemples. On peut vérifier que les fonctions sin, cos et arctan sont lipschitziennes de rapport 1 sur $\mathbb{R}$.

5.2.3 Applications des accroissements finis

Proposition 5.8 (sens de variation) *On considère un intervalle I et une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Alors f est croissante (resp. strictement croissante, décroissante, strictement décroissante, constante) si et seulement si $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) > 0$, $f'(x) \leq 0$, $f'(x) < 0$, $f'(x) = 0$) pour tout $x \in I$.*

Preuve. On montre d'abord l'implication $\Longrightarrow$: on suppose f croissante et on veut montrer que $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$: en effet, si x_0 est un réel fixé de I, alors le taux d'accroissement de f en x_0 satisfait

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \text{ si } x \geq x_0 \text{ et } \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \text{ si } x \leq x_0.$$

Par conséquent, en passant à la limite lorsque x tend vers x_0, on a bien $f'(x_0) \geq 0$.

On montre ensuite l'implication $\Longleftarrow$: on suppose l'inégalité sur $f'(x)$ vérifiée pour tout $x \in I$ et on veut montrer la monotonie de f. On choisit $a < b \in I$. Il suffit alors de considérer $c \in]a, b[\subset I$ tel que $f'(c) = (f(b)-f(a))/(b-a)$ (par application de la formule des accroissements finis) et de remarquer que $f'(c)$ et $(f(b) - f(a))$ ont même signe.□

Remarque. Le résultat est faux si on ne suppose plus f définie sur un intervalle. Par exemple, la fonction $f(x) = 1/x$ définie sur $\mathbb{R}^*$ a sa dérivée strictement négative sur tout $\mathbb{R}^*$ et pourtant, n'est pas décroissante sur tout $\mathbb{R}^*$. On peut seulement dire qu'elle est décroissante sur l'intervalle $]-\infty, 0[$ et décroissante sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Proposition 5.9 (formule et inégalité des accroissements finis généralisées) *On considère $a < b$, f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$ telle que $g'(x) > 0$ pour tout $x \in]a, b[$. On a : (1) il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)};$$

(2) Si pour tout $x \in]a, b[$, $|f'(x)| \leq g'(x)$, alors

$$|f(b) - f(a)| \leq (g(b) - g(a)).$$

Preuve. *Remarque préliminaire* : g' ne s'annule pas donc la fonction g est injective et puisque $g' > 0$, g est strictement croissante. En particulier, $g(b) > g(a)$.
(1) On considère la fonction H définie sur $[a, b]$ par l'identité

$$H(x) = (f(b) - f(a))(g(x) - g(b)) - (g(b) - g(a))(f(x) - f(a)), \quad x \in [a, b].$$

Par les théorèmes généraux, la fonction H est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. De plus, $H(a) = H(b) = -(f(b) - f(a))(g(b) - g(a))$. Par conséquent, d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $H'(c) = 0$. Il reste à remarquer que

$$H'(c) = 0 \Longleftrightarrow (f(b) - f(a))g'(c) - (g(b) - g(a))f'(c) = 0 \Longleftrightarrow \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Le résultat (2) se déduit directement de la remarque préliminaire et du résultat (1).□

Exemple. On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par les identités $f(x) = \cos(x)$ et $g(x) = x^2/2$, $x \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $x \in [0, \pi/2]$, on a $|f'(x)| = |-\sin(x)| \leq x = g'(x)$ donc d'après l'inégalité des accroissements finis généralisée appliquée aux points $0 \leq x \leq \pi/2$ et $\pi/2$, on obtient (attention à l'ordre entre x et $\pi/2$!)

$$|f(\pi/2) - f(x)| = |\cos(x) - 0| = \cos(x) \leq g(\pi/2) - g(x) = \frac{\pi^2}{8} - \frac{x^2}{2}, \quad x \in [0, \pi/2].$$

Proposition 5.10 (prolongements $\mathcal{C}^1$ de fonctions) *On considère un intervalle I contenant x_0 et une fonction $f : I \setminus \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Alors si les deux limites $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ et $\lim_{x \to x_0} f'(x) = t$ existent dans $\mathbb{R}$, la fonction $\widetilde{f}$ définie sur I comme le prolongement de f vérifiant $f(x_0) = l$ est dérivable en x_0 (de dérivée t).*

Preuve. La continuité du prolongement est immédiate. Pour obtenir sa dérivabilité en x_0, on va montrer avec la définition de la limite que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = t.$$

En effet, **soit** $\varepsilon > 0$**.** Comme $\lim_{x \to x_0} f'(x) = t$, on prend $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap I$, $|f'(x) - t| < \varepsilon$. Fixons $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap I$. Puisque I est un intervalle, on peut appliquer la formule des accroissements finis entre x_0 et x et on obtient l'existence de $c_x \in]x, x_0[$ ou $c_x \in]x_0, x[$ tel que

$$t - \varepsilon < f'(c_x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < t + \varepsilon.$$

En conclusion, **pour tout** $\mathbf{x} \in]\mathbf{x_0} - \eta, \mathbf{x_0} + \eta[\cap \mathbf{I}$**,** on a

$$\left| \frac{\mathbf{f(x) - f(x_0)}}{\mathbf{x - x_0}} \right| \leq \varepsilon,$$

c'est-à-dire que le prolongement de f est dérivable en x_0, de dérivée t.□

Exemple. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par l'identité $f(x) = x^3 \sin(1/x)$, $x \neq 0$. Montrons que f admet un prolongement dérivable à $\mathbb{R}$ tout entier : pour tout $x \neq 0$,

$$|f(x)| = \left| x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x|^3,$$

donc par théorème de comparaison des limites, f tend vers 0 lorsque x tend vers 0. De plus, pour tout $x \neq 0$, on a

$$|f'(x)| = |3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x \cos\left(\frac{1}{x}\right)| \leq 3x^2 + |x|.$$

Par la même méthode que précédemment, f' tend vers 0 lorsque x tend vers 0. En conclusion, d'après le théorème de prolongement ci-dessus, on obtient que f se prolonge à $\mathbb{R}$ tout entier en une application de classe $\mathcal{C}^1$.

5.3 Formules de Taylor

5.3.1 Formule de Taylor-Young

Théorème 5.11 (Taylor-Young) *On considère un intervalle I contenant x_0, un entier $n \geq 1$ et une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ sur I et telle que $f^{(n-1)}$ est dérivable en x_0. Alors on a*

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x \to x_0}{=} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o\left((x - x_0)^n\right) \\ &\underset{x \to x_0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o\left((x - x_0)^n\right). \end{aligned}$$

Preuve. On montre la propriété par récurrence sur $n \geq 1$:
•$n = 1$: c'est très exactement le résultat obtenu dans la preuve de la proposition 5.2.
•$n > 1$: on suppose le résultat acquis au rang $(n-1)$ et on souhaite le montrer au rang n. Pour une fonction f vérifiant les hypothèses de l'énoncé, on considère la fonction g s'annulant en x_0 et définie sur I par l'identité

$$g(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k, \quad x \in I.$$

Le but est d'obtenir que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{(x - x_0)^n} = 0. \tag{5.1}$$

Remarquons tout d'abord que g est une fonction dérivable sur I comme combinaison linéaire de fonctions dérivables et

$$g'(x) = f'(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!}(x - x_0)^{k-1}, \quad x \in I.$$

En particulier, en appliquant l'hypothèse de récurrence à f', fonction de classe $\mathcal{C}^{n-2}$ sur I et telle que $(f')^{(n-2)}$ est dérivable en x_0, on a

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g'(x)}{(x - x_0)^{n-1}} = 0. \tag{5.2}$$

Par ailleurs, en appliquant la formule des accroissements finis à la fonction g sur l'intervalle $[x_0, x]$ ou $[x, x_0]$, on a pour tout $x \in I$ l'existence de $c_x \in]x_0, x[$ ou $]x, x_0[$ tel que

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(c_x).$$

Par conséquent, on a

$$\frac{g(x)}{(x - x_0)^n} = \frac{1}{(x - x_0)^{n-1}} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \frac{g'(c_x)}{(x - x_0)^{n-1}}, \quad x < c_x < x_0 \text{ ou } x_0 < c_x < x. \tag{5.3}$$

En utilisant la limite (5.2), on déduit d'un passage à la limite quand x tend vers x_0 dans (5.3) le résultat voulu (5.1).□

5.3.2 Formule de Taylor-Lagrange

Théorème 5.12 (Taylor-Lagrange) *On considère $a < b$, $n \in \mathbb{N}^*$ et une fonction f définie sur $[a, b]$, de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ sur $[a, b]$ et telle que $f^{(n-1)}$ est dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n.$$

Preuve. On remarque tout d'abord que pour $n = 1$, la formule de Taylor-Lagrange est précisément la formule des accroissements finis. On va donc s'inspirer de la démonstration du théorème 5.6 et définir une fonction intermédiaire bien choisie à laquelle on appliquera le théorème de Rolle. Considérons donc la fonction g définie sur $[a, b]$ par l'identité

$$g(x) = f(b) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k - M\frac{(b-x)^n}{n!}, \quad x \in [a, b],$$

où M est un réel tel que $g(a) = 0$, soit

$$M = \frac{n!}{(b-a)^n}\left[f(b) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\right].$$

En particulier, g est une fonction continue sur $[a, b]$ (resp. dérivable sur $]a, b[$) car obtenue par combinaison linéaire de produits de fonctions continues sur $[a, b]$ (resp. dérivables sur $]a, b[$). En particulier, le calcul de sa dérivée donne par méthode de "téléscopage des sommes"

$$\begin{aligned}
g'(x) &= -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}(b-x)^{k-1} + M\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= -\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}(b-x)^{k-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}(b-x)^{k-1} + M\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= -\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}\left(f^{(n)}(x) - M\right).
\end{aligned}$$

De plus, $g(b) = g(a) = 0$ donc on peut appliquer le théorème de Rolle entre a et b, c'est-à-dire qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$, soit tel que $f^{(n)}(c) = M$, ce qui est précisément le résultat voulu.$\square$

Remarque. La formule de Taylor-Lagrange reste vraie même si $b < a$, auquel cas il existe $c \in]b, a[$ satisfaisant l'identité ci-dessus.

5.3.3 Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème 5.13 (Taylor avec reste intégral) *On considère $a < b$, $n \in \mathbb{N}^*$ et une fonction f définie sur $[a, b]$, de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$. Alors on a*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(b-t)^{n-1}dt.$$

Preuve. On procède par récurrence sur $n \geq 1$:
$\bullet n = 1$: on a bien $f(b) = f(a) + \displaystyle\int_a^b f'(t)dt$.
$\bullet n > 1$: on suppose le résultat acquis au rang $(n-1)$, c'est-à-dire que

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{f^{(n-1)}(t)}{(n-2)!}(b-t)^{n-2}dt. \tag{5.4}$$

On souhaite le montrer au rang n. Pour ce faire, on intègre par parties dans l'intégrale en posant $u(t) = f^{(n-1)}(t)$, $v'(t) = (b-t)^{n-2}/(n-2)!$, $u'(t) = f^{(n)}(t)$ et $v(t) = -(b-t)^{n-1}/(n-1)!$. On obtient ainsi

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{f^{(n-1)}(t)}{(n-2)!}(b-t)^{n-2}dt &= \left[-f^{(n-1)}(t)\frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}\right]_a^b + \int_a^b \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(b-t)^{n-1}dt \\ &= \frac{f^{(n-1)}(a)}{k!}(b-a)^{n-1} + \int_a^b \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(b-t)^{n-1}dt. \end{aligned} \tag{5.5}$$

En reportant l'égalité (5.5) dans (5.4), on obtient la formule de Taylor avec reste intégral au rang n.$\square$

5.3.4 Applications des formules de Taylor

Recherche d'extrema. On rappelle que si f est défini sur un voisinage de x_0, dérivable en x_0 et admet un extremum local en ce point, alors $f'(x_0) = 0$. La réciproque est fausse (par exemple, la dérivée de la fonction cube est nulle en 0 mais 0 n'est pas un extremum de la fonction cube). Concrètement, on regarde le signe localement de $(f(x) - f(x_0))$ en faisant un développement limité jusqu'à tomber sur un terme de la forme $a_k(x-x_0)^k$ avec $a_k \neq 0$. Si k est impair, alors x_0 n'est pas un extremum et si k est pair, alors suivant que a_k est positif ou négatif, on a un minimum local ou un maximum local.

Par exemple, on considère la fonction f définie par $f(x) = \cos(x) - \operatorname{ch}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Après calcul, on obtient au voisinage de $x_0 = 0$ le développement

$$\cos(x) - \operatorname{ch}(x) \underset{x \to 0}{=} -x^2 + o(x^3).$$

En particulier, la fonction admet un maximum local en $x_0 = 0$.

Recherche de points d'inflexion. Lorsque f est défini sur un voisinage d'un point x_0 et dérivable en x_0, on dit que x_0 est un point d'inflexion si $g(x) = f(x) - f(x_0) - (x - x_0)f'(x_0)$ change de signe suivant que $x \geq x_0$ ou $x \leq x_0$. En particulier, si f est deux fois dérivable en un point d'inflexion x_0, alors x_0 satisfait $f''(x_0) = 0$. La réciproque est fausse (considérer $f(x) = x^4$ en 0). De même que pour la recherche d'extrema, on effectue un développement limité au voisinage de x_0 et on obtient que x_0 est un point d'inflexion si et seulement si la première puissance de $(x - x_0)$ qui apparaît dans le développement de $g(x)$ est impaire.

Par exemple, on considère la fonction f définie par $f(x) = \sin(x) + \arcsin(x)$, $x \in [-1, 1]$. En particulier, au voisinage de 0, on a, après calcul,

$$\sin(x) + \arcsin(x) \underset{x \to 0}{=} 2x + \frac{x^5}{12} + o(x^6).$$

Par conséquent, la première puissance après 1 qui apparaît dans le développement est 5 donc est impaire. La fonction f admet par conséquent un point d'inflexion en $x_0 = 0$.

Développement en série. On considère un réel fixé x. En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à la fonction exp entre x et 0, pour tout $n \geq 1$, il existe $c_n \in]0, x[$ ou $]x, 0[$ tel que

$$\exp(x) - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}(\exp)^{(n+1)}(c_n).$$

De plus, toutes les dérivées successives de la fonction exp sont égales à la fonction exp elle-même. Par conséquent, le terme à droite de l'inégalité satisfait

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}(\exp)^{(n+1)}(c_n) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\exp(c_n) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\max(1, e^x).$$

Il reste à remarquer que $x^n/n!$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini pour conclure que

$$\exp(x) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Remarquons que cette égalité est aussi vraie pour tout $x \in \mathbb{C}$.

Chapitre 6

Etude de courbes paramétrées du plan

Introduction

Définition 6.1 (courbe paramétrée) *Soit* $F : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (X(t), Y(t)) \end{array} \right.$ *une fonction définie sur un intervalle de* $\mathbb{R}$*. On appelle* courbe paramétrée *par* F *l'ensemble* $\mathcal{C} = F(I)$ *des points* $M(t)$ *de coordonnées* $(X(t), Y(t))$*,* t *décrivant* I*. On note*

$$\mathcal{C} : \left\{ \begin{array}{ll} x & = X(t) \\ y & = Y(t) \end{array} \right. \tag{6.1}$$

Exemples. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles. Alors sa courbe représentative peut être vue comme la courbe paramétrée par $\left\{ \begin{array}{ll} x & = t \\ y & = f(t) \end{array} \right.$, $t \in I$.

Le cercle centré en $A(x_A, y_A)$ et de rayon $r > 0$ est paramétré par $\left\{ \begin{array}{ll} x & = x_A + r\cos(\theta) \\ y & = y_A + r\sin(\theta) \end{array} \right.$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Une autre paramétrisation possible de ce cercle est $\left\{ \begin{array}{ll} x & = x_A + r\sin(3\theta) \\ y & = y_A + r\cos(3\theta) \end{array} \right.$, $\theta \in \mathbb{R}$ ou encore $\left\{ \begin{array}{ll} x & = x_A + r\frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y & = y_A + r\frac{2t}{1+t^2} \end{array} \right.$, $t \in \mathbb{R}$.

Remarque. Un même ensemble peut avoir plusieurs paramétrisations différentes (voir l'exemple ci-dessus du cercle).

6.1 Symétries, classe de la courbe, variations

Proposition 6.2 *On suppose que* I *est un intervalle symétrique par rapport à* 0*. Suivant les symétries des fonctions* X *et* Y*, l'invariance de la courbe* $\mathcal{C}$ *est la suivante :*

X \ Y	*paire*	*impaire*
paire	-	*symétrique par rapport à* (Ox)
impaire	*symétrique par rapport à* (Oy)	*symétrique par rapport à* O

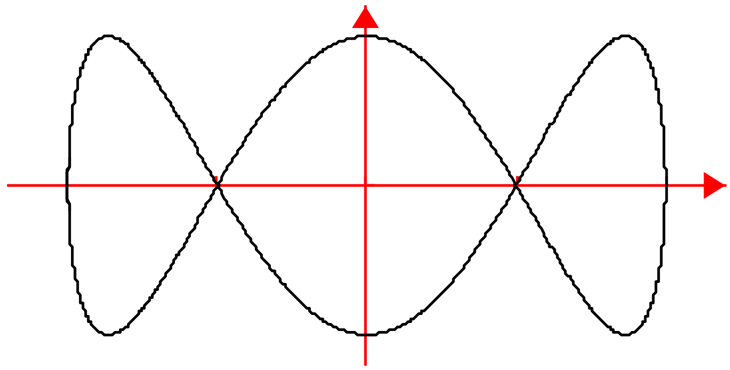


FIG. 6.1 – Tracé de la courbe paramétrée $\mathcal{C}_1$

Dans tous les cas, on peut limiter l'étude de la courbe paramétrée à $I \cap \mathbb{R}_+$ puis faire une symétrie éventuelle.

Exemple.

$$\mathcal{C}_1 : \begin{cases} x &= 2\cos(t) \\ y &= \sin(3t) \end{cases} , \quad t \in \mathbb{R}.$$

_ F est 2π-périodique donc on peut restreindre l'étude à $I = [-\pi, \pi]$.
_ X est paire et Y est impaire donc on peut se contenter d'étudier F sur $[0, \pi]$ puis faire une symétrie par rapport à (Ox).
_ $X(\pi - t) = -X(t)$ et $Y(\pi - t) = Y(t)$ donc on peut se contenter d'étudier F sur $[0, \pi/2]$ puis faire une symétrie par rapport à (Oy).
_ X et Y sont de classe $\mathcal{C}^\infty$. Voici le tableau de variation de ces deux fonctions (voir la figure pour le tracé de la courbe) :

t	0		$\pi/6$		$\pi/2$
$X'(t)$	0	$-$	-1	$-$	-2
$X(t)$	2	$\searrow$	$\sqrt{3}$	$\searrow$	0
$Y(t)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1
$Y'(t)$	3	$+$	0	-	0

Remarque. En particulier, le point $A(1, 0)$ est dit point double de la courbe $\mathcal{C}_1$ car il existe $t_1 \neq t_2 \in]-\pi, \pi[$ tels que $M(t_1) = M(t_2) = A$. Il en est de même pour $B(-1, 0)$.

6.2 Tangentes, points de rebroussements

Définition 6.3 (points réguliers, singuliers) *On considère le vecteur* $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt} = F'(t)$, $t \in I$. *Alors le point* $M(t_0)$ *est dit* régulier *lorsque ce vecteur est non nul. Sinon, il est dit* singulier *(ou stationnaire).*

Exemples. Tous les points de la courbe $\mathcal{C}_1$ sont réguliers.

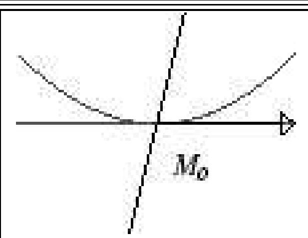
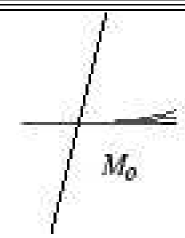
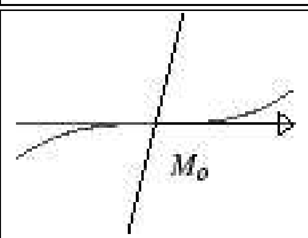
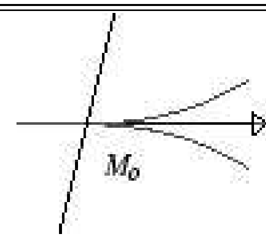
Définition 6.4 (tangente) *(1) Lorsqu'un point $M(t_0)$, $t_0 \in I$, est régulier, on appelle* tangente *en ce point à la courbe la droite passant par $M(t_0)$ et de vecteur directeur $F'(t_0)$.*
(2) Lorsque $M(t_0)$ est singulier, s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que F est de classe $\mathcal{C}^p$ et tel que $F'(t_0) = \cdots = F^{(p-1)}(t_0) = 0$, $F^{(p)}(t_0) \neq 0$, alors on appelle tangente généralisée *en ce point la droite passant par $M(t_0)$ et de vecteur directeur $F^{(p)}(t_0)$.*

Exemples. La tangente à $\mathcal{C}_1$ en $M(0)$ est verticale, les tangentes en $M(\pi/6)$ et $M(\pi/2)$ sont horizontales.
Remarque. La pente de la tangente en $M(t_0)$ point régulier est alors $Y'(t_0)/X'(t_0)$ si $X'(t_0) \neq 0$ (et l'infini sinon).

Proposition 6.5 *On considère $p < q \in \mathbb{N}^*$, on suppose F de classe $\mathcal{C}^q$ et on considère un point $M(t_0)$, $t_0 \in I$ tel que*

$$\begin{cases} F'(t_0) = \cdots = F^{(p-1)}(t_0) = 0 \\ F^{(p)}(t_0) \neq 0 \\ F^{(p+1)}(t_0), \cdots, F^{(q-1)}(t_0) \text{ colinéaires à } F^{(p)}(t_0) \\ \{F^p(t_0), F(q)(t_0)\} \text{ famille libre} \end{cases}.$$

Alors l'allure locale de la courbe au voisinage de $M_0 = M(t_0)$ est résumée dans le tableau ci-dessous :

q \ p	*impair*	*pair*
pair	 *point ordinaire*	 *rebroussement de 2ème espèce*
impair	 *point d'inflexion*	 *rebroussement de 1ère espèce*

Preuve. En utilisant le théorème de Taylor-Young à l'ordre q, on obtient que lorsque h tend vers 0, il existe des constantes $\alpha_{p+1}, \cdots, \alpha_{q-1}$ telles que

$$F(t_0 + h) = F(t_0) + \left(\frac{h^p}{p!} + \sum_{k=p+1}^{q-1} \frac{h^q}{q!} \alpha_k \right) F^{(p)}(t_0) + \frac{h^q}{q!} F^{(q)}(t_0) + o(h^q).$$

Autrement dit, dans le repère $(M(t_0), F^{(p)}(t_0), F^{(q)}(t_0))$, la première coordonnée de $M(t_0 + h)$ est équivalente à $h^p/p!$ tandis que la seconde est équivalente à $h^q/q!$. Suivant la parité de p et q, on obtient les comportements locaux représentés ci-dessus.

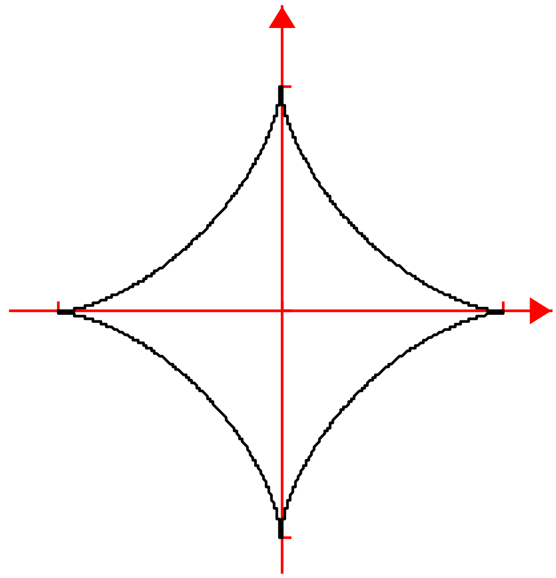


FIG. 6.2 – Tracé de la courbe paramétrée $\mathcal{C}_2$

□

Exemple.

$$\mathcal{C}_2 : \begin{cases} x &= \cos^3(t) \\ y &= \sin^3(t) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

_ F est 2π-périodique donc on peut restreindre l'étude à $I = [-\pi, \pi]$.
_ X est paire et Y est impaire donc on peut se contenter d'étudier F sur $[0, \pi]$ puis faire une symétrie par rapport à (Ox).
_ $X(\pi - t) = -X(t)$ et $Y(\pi - t) = Y(t)$ donc on peut se contenter d'étudier F sur $[0, \pi/2]$ puis faire une symétrie par rapport à (Oy).
_ $X(\pi/2 - t) = Y(t)$ et $Y(\pi/2 - t) = X(t)$ donc on peut se contenter d'étudier F sur $[0, \pi/4]$ puis faire une symétrie par rapport à la première bissectrice du plan.
_ X et Y sont de classe $\mathcal{C}^\infty$. Voici le tableau de variation de ces deux fonctions (voir la figure pour le tracé de la courbe) :

t	0		$\pi/4$
$X'(t)$	0	$-$	$-3\sqrt{2}/4$
$X(t)$	1	$\searrow$	$\sqrt{2}/4$
$Y(t)$	0	$\nearrow$	$\sqrt{2}/4$
$Y'(t)$	0	$+$	$3\sqrt{2}/4$

_ Au point $M(\pi/4)$, la tangente est de pente -1. Le point $M(0)$ est singulier : quand $h \to 0$,

$$F(h) = \begin{pmatrix} \cos^3(h) \\ \sin^3(h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{h^2}{2} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{h^3}{6} \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} + o(h^3).$$

Par conséquent on obtient $p = 2$, $q = 3$, donc $M(0)$ est un point de rebroussement de première espèce.

6.3 Branches infinies

Définition 6.6 (branche infinie) *Soit $t_0 \in \overline{I}$ (éventuellement $\pm\infty$). Alors la courbe $\mathcal{C}$ possède une branche infinie au voisinage de t_0 si au moins l'une des deux fonctions X et Y tend vers $\pm\infty$ quand $t \to t_0$.*

Proposition 6.7 *On suppose que $\mathcal{C}$ a une branche infinie en t_0. Alors :*
(1) Si $\lim_{t\to t_0} X(t) = a \in \mathbb{R}$ et $\lim_{t\to t_0} Y(t) = \pm\infty$, alors la droite d'équation $(x = a)$ est asymptote verticale à la courbe $\mathcal{C}$;
(2) Si $\lim_{t\to t_0} X(t) = \pm\infty$ et $\lim_{t\to t_0} Y(t) = b \in \mathbb{R}$, alors la droite d'équation $(y = b)$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}$;
(3) Si $\lim_{t\to t_0} X(t) = \pm\infty$ et $\lim_{t\to t_0} Y(t) = \pm\infty$, alors on étudie la limite de $Y(t)/X(t)$:
(a) si elle vaut $m \in \mathbb{R}^*$ et si $\lim_{t\to t_0}(Y(t) - mX(t)) = p \in \mathbb{R}$ alors la droite d'équation $(y = mx + p)$ est asymptote oblique à la courbe. Sinon, soit la limite de $(Y(t) - mX(t))$ est infinie (branche parabolique de direction $\overrightarrow{i} + m\overrightarrow{j}$), soit elle n'existe pas ;
(b) si elle vaut 0, alors la courbe admet une branche parabolique de direction (Ox) ;
(c) si elle vaut $\pm\infty$, alors la courbe admet une branche parabolique de direction (Oy).

Exemple.

$$\mathcal{C}_3 : \begin{cases} x &= \frac{2t}{1+t^3} \\ y &= \frac{2t^2}{1+t^3} \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

_ $X(1/t) = Y(t)$ et $Y(1/t) = X(t)$ donc on peut se contenter d'étudier F sur $]-1, 1[$ puis faire une symétrie par rapport à la première bissectrice du plan.
_ X et Y sont de classe $\mathcal{C}^\infty$. Voici le tableau de variation de ces deux fonctions (voir la figure pour le tracé de la courbe) :

t	-1		0		$2^{-1/3}$		1
$X'(t)$		$+$		$+$	0	-	$-1/2$
$X(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$	1
$Y(t)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$		$\nearrow$	1
$Y'(t)$		-	0	$+$		$+$	$1/2$

_ Au voisinage de -1, il faut étudier la branche infinie : $\lim\limits_{t\to -1} \dfrac{Y(t)}{X(t)} = -1$ et quand $t \to -1$,

$$Y(t) + X(t) = -\frac{2}{3} + \frac{2}{9}(t+1)^2 + o((t+1)^2).$$

Donc la droite d'équation $(y = -x - 2/3)$ est asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}_3$. De plus, $\mathcal{C}_3$ est au-dessus de cette asymptote (car $\frac{2}{9}(t+1)^2 > 0$).

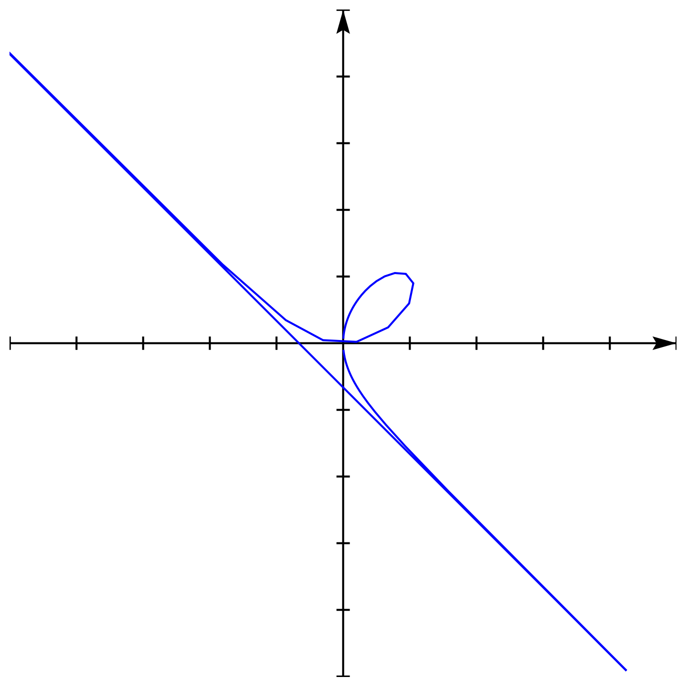


FIG. 6.3 – Tracé de la courbe paramétrée $\mathcal{C}_3$

Annexe 1 : développements limités classiques

Pour tous $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$
\begin{aligned}
\exp(x) &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o\left(x^n\right) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right) \\
\mathrm{ch}(x) &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2n+1}\right) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right) \\
\mathrm{sh}(x) &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right) \\
\sin(x) &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right) \\
\cos(x) &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2k+1}\right) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right) \\
\tan(x) &\underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6) \\
\frac{1}{1-x} &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + o\left(x^n\right) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o\left(x^n\right) \\
\ln(1+x) &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o\left(x^n\right) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + o\left(x^n\right) \\
(1+x)^\alpha &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o\left(x^n\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o\left(x^n\right).
\end{aligned}
$$

Annexe 2 : utilisation de la notion de convexité

Définition 6.8 (fonction convexe) *On considère une fonction f définie sur un intervalle I. Alors f est dite* convexe *si pour tous $a, b \in I$ et tout $t \in [0,1]$, on a*

$$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b).$$

Lorsque $(-f)$ est convexe, on dit que la fonction f est concave.

Remarque. Cette définition signifie géométriquement que la courbe représentative de la fonction f dans un repère est en-dessous des cordes reliant deux points de la courbe.

Théorème 6.9 (caractérisations de la convexité) *On considère une fonction f définie sur un intervalle I.*
(1) f est convexe si et seulement si pour tous $a < b < c \in I$, on a

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b};$$

(2) Lorsque f est dérivable sur I, f est convexe si et seulement si f' est une fonction croissante sur I ;
(3) Lorsque f est deux fois dérivable sur I, f est convexe si et seulement si $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$;
(4) Lorsque f est dérivable sur I, f est convexe si et seulement si la courbe représentative de la fonction dans un repère est au-dessus de ses tangentes, c'est-à-dire pour tous $x, y \in I$,

$$f(y) \geq f(x) + (y-x)f'(x).$$

Preuve. (1) On suppose f convexe et on considère $a < b < c \in I$. En particulier, $b = ta + (1-t)c$ avec $t = (c-b)/(c-a) \in [0,1]$. En particulier,

$$f(b) = f(ta + (1-t)c) \leq tf(a) + (1-t)f(c) = \frac{c-b}{c-a}f(a) + \frac{b-a}{c-a}f(c),$$

donc en écrivant $f(b) = (t + (1-t))f(b)$, on obtient

$$\frac{c-b}{c-a}(f(b)-f(a)) \leq \frac{b-a}{c-a}(f(c)-f(b)).$$

Réciproquement, on suppose l'inégalité de (1) vérifiée et on veut retrouver la définition de la convexité de f : on considère $a < c$ et $t \in [0,1]$, puis on pose $b = ta + (1-t)c$ et on procède de même que précédemment, en “remontant” les inégalités.

(2) On suppose f convexe et dérivable et on souhaite montrer que f' est croissante. On considère $x < y \in I$. D'après la caractérisation fournie par (1) de la convexité, on a pour tout $h > 0$ tel que $x < x+h < y-h < y$,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leq \frac{f(y)-f(y-h)}{h}.$$

Lorsque h tend vers 0, le terme de gauche tend vers $f'(x)$ et celui de droite, vers $f'(y)$. En conclusion, $f'(x) \leq f'(y)$.

Réciproquement, on suppose f' croissante et on veut montrer que f est convexe : en utilisant la caractérisation (1) de la convexité, soient $a < b < c \in I$. Alors d'après la formule des accroissements finis appliquée à f sur l'intervalle $[a,b]$, il existe $\alpha \in]a.b[$ tel que

$$f'(\alpha) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

De même, il existe $\beta \in]b,c[$ tel que

$$f'(\beta) = \frac{f(c)-f(b)}{c-b}.$$

Comme f' est croissante, on a $f'(\alpha) \leq f'(\beta)$ et on en déduit l'inégalité de (1), ce qui implique que f est convexe.

(4) On suppose f convexe et on souhaite montrer l'inégalité de (4). Soient $x < y \in I$ et $h > 0$. Alors d'après l'inégalité de (1) appliquée à $a = x-h$, $b = x$ et $c = y$, on a

$$\frac{f(x)-f(x-h)}{h} \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x},$$

et lorsque h tend vers 0, on obtient bien $f'(x)(y-x)+f(x) \leq f(y)$. On montre l'inégalité de (4) pour $y < x$ en appliquant (1) à $a = y$, $b = x$ et $c = x+h$.

Réciproquement, on suppose que l'inégalité de (4) est réalisée et on veut montrer que f est convexe en utilisant la caractérisation de (1). Soient $a < b < c \in I$. Appliquons l'inégalité de (4) à $x = b$ et $y = a$:

$$f(a) \geq f(b) - (b-a)f'(b).$$

De même, en appliquant l'inégalité de (4) à $x = b$ et $y = c$, on a

$$f(c) \geq f(b) + (c-b)f'(b).$$

Par conséquent, on en déduit que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'(b) \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}.\square$$

Exemples d'inégalités de convexité. La fonction exp est convexe sur $\mathbb{R}$ car sa dérivée seconde existe et est positive. Par conséquent, la courbe représentative de la fonction exponentielle est au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 0, c'est-à-dire

$$\exp(x) \geq 1 + x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

La fonction $f : x \longmapsto \ln(1+x)$ est concave sur $]-1,+\infty[$ car elle est deux fois dérivable, de dérivée seconde $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} < 0$, $x > -1$. Par conséquent, la courbe est en particulier en-dessous de sa tangente au point d'abscisse 0, c'est-à-dire que

$$\ln(1+x) \leq x, \quad x > -1.$$

La fonction sin est concave sur $[0, \pi]$ car elle est deux fois dérivable, de dérivée seconde $-\sin$ qui est une fonction négative sur cet intervalle. En particulier, la courbe représentative de la fonction sin entre 0 et $\pi/2$ est située en-dessous de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0 et au-dessus de la corde reliant les points d'abscisses 0 et $\pi/2$. On obtient ainsi

$$\frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x, \quad x \in [0, \pi/2].$$

Annexe 3 : compléments sur la topologie de $\mathbb{R}$

Ouverts et fermés

Définitions et propriétés

Définition 6.10 (ouverts) *On considère un sous-ensemble O de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. O est dit* ouvert *dans $\mathbb{R}$ si*

$$\forall x \in O, \exists \varepsilon > 0;]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset O.$$

Exemple 1. $\emptyset$ et $\mathbb{R}$ sont des sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}$.
Exemple 2. Soient a, b deux nombres réels tels que $a < b$. Alors l'intervalle $O =]a, b[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. En effet, soit $x \in]a, b[$. On pose $\varepsilon = \min(x - a, b - x) > 0$ et montrons que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset O$: soit $y \in]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$. On a alors

$$a \leq x - \varepsilon < y < x + \varepsilon \leq b,$$

soit $y \in]a, b[$. On a donc bien prouvé que $]a, b[$ est un ensemble ouvert dans $\mathbb{R}$. De la même manière, tout intervalle du type $]-\infty, b[$ ou $]a, +\infty[$, $a, b \in \mathbb{R}$, est ouvert dans $\mathbb{R}$.
Exemple 3. En revanche, $]-\infty, b]$ n'est pas ouvert dans $\mathbb{R}$. En effet, prenons $x = b$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, $]b - \varepsilon, b + \varepsilon[$ n'est pas inclus dans $]-\infty, b]$ car en particulier, le nombre $y = b + (\varepsilon/2)$ n'est pas dans $]-\infty, b]$. De même, les intervalles du type $]a, b]$ ou $[a, b[$ ou $[a, b]$ ou $[a, +\infty[$ ainsi que les singletons $\{a\}$ avec $a < b \in \mathbb{R}$ ne sont pas ouverts.

Proposition 6.11 *(union, intersection d'ouverts)*
(1) Une union **quelconque** *d'ouverts de $\mathbb{R}$ est encore un ouvert de $\mathbb{R}$;*
(2) Une intersection **finie** *d'ouverts de $\mathbb{R}$ est encore un ouvert de $\mathbb{R}$.*

Preuve. (1) Soient I un ensemble non vide et pour tout $i \in I$, O_i un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}$. Il faut montrer que $\bigcup_{i \in I} O_i$ est encore un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}$: considérons $x \in \bigcup_{i \in I} O_i$. En particulier, il existe i_0 tel que $x \in O_{i_0}$. Comme O_{i_0} est un ouvert de $\mathbb{R}$, soit $\varepsilon > 0$ tel que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset O_{i_0}$. On obtient alors que

$$]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset O_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} O_i.$$

En conclusion, $\bigcup_{i \in I} O_i$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}$.

(2) On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on considère une collection de n ouverts $O_1, \cdots, O_n$. Il faut montrer que $\bigcap_{i=1}^{n} O_i$ est encore un ouvert de $\mathbb{R}$: soit $x \in \bigcap_{i=1}^{n} O_i$. Alors pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, $x \in O_i$ et O_i est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}$ donc il existe ε_i tel que $]x - \varepsilon_i, x + \varepsilon_i[\subset O_i$. En particulier, en posant $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) > 0$, on obtient que

$$]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset]x - \varepsilon_i, x + \varepsilon_i[\subset O_i \ \ \forall i \in \{1, \cdots, n\}, \text{ soit }]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset \bigcap_{i=1}^{n} O_i.$$

En conclusion, $\bigcap_{i=1}^{n} O_i$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}$.$\square$

Exemple 1. Le sous-ensemble $O = \{x \in \mathbb{R}; \sin(x) > 1/2\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. En effet,

$$\begin{cases} \sin x > \frac{1}{2} \\ x \in [0, 2\pi[\end{cases} \iff x \in \left]\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right[.$$

Donc

$$O = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left]\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right[$$

est un ouvert car s'écrit comme une réunion d'ouverts (en nombre infini).

Exemple 2. Le sous-ensemble $O' = \{x \in [0, 10\pi]; \sin(x) > 1/2\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. En effet, comme 0 et 10π ne sont pas dans O', l'ensemble O' s'écrit aussi

$$O' = \{x \in \mathbb{R}; \sin(x) > 1/2\} \cap [0, 10\pi] = \{x \in \mathbb{R}; \sin(x) > 1/2\} \cap]0, 10\pi[= O \cap]0, 10\pi[,$$

c'est-à-dire que O' est intersection des deux ouverts O et $]0, 10\pi[$.

Remarque. Attention : une intersection non finie d'ouverts n'est pas nécessairement un ouvert. Considérons par exemple $O_n =]-1/n, 1/n[$ pour tout $n \geq 1$. O_n est clairement un ouvert de $\mathbb{R}$ pour tout $n \geq 1$ et considérons de plus $x \in \bigcap_{n \geq 1}]-1/n, 1/n[$. Alors

$$-\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}$$

donc par le théorème des trois suites quand $n \to +\infty$, on obtient que $x = 0$. Réciproquement, $0 \in \bigcap_{n \geq 1}]-1/n, 1/n[$. En conclusion, on a donc

$$\bigcap_{n \geq 1} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[= \{0\},$$

ce qui n'est pas un ensemble ouvert de $\mathbb{R}$.

Définition 6.12 (fermés) *On considère un sous-ensemble F de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. F est dit* fermé *dans $\mathbb{R}$ si $\mathbb{R} \setminus F$ est ouvert dans $\mathbb{R}$.*

Exemples 1. $\emptyset$ et $\mathbb{R}$ sont des sous-ensembles fermés de $\mathbb{R}$. Tout intervalle du type $[a, b]$ avec $a \leq b$ est fermé dans $\mathbb{R}$ car $\mathbb{R} \setminus [a, b] =]-\infty, a[\cup]b, +\infty[$ est ouvert comme union de deux intervalles ouverts. De même, tous les intervalles $]-\infty, b]$, $[a, +\infty[$, $a, b \in \mathbb{R}$, sont fermés. Les autres types d'intervalles ne sont pas fermés.
Exemple 2. $\mathbb{Z}$ est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}$ car

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}}]n, n+1[$$

est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}$ comme union d'intervalles ouverts.
Exemple 3. L'ensemble $F = \{x \in \mathbb{R}; (1/4) \leq \sin(x) \leq (3/4)\}$ est fermé car son complémentaire s'écrit comme la réunion de deux ouverts :

$$\mathbb{R} \setminus F = \{x \in \mathbb{R}; \sin(x) < 1/4\} \cup \{x \in \mathbb{R}; \sin(x) > 3/4\}.$$

Remarque. Attention : "Etre fermé" n'est pas le contraire de "être ouvert". Il existe des ensembles qui ne sont ni ouverts, ni fermés comme les intervalles du type $[a, b[$ ou $]a, b]$ avec $a < b$.

Par ailleurs, il existe aussi des ensembles qui sont à la fois ouverts et fermés comme $\emptyset$ et $\mathbb{R}$. On peut d'ailleurs montrer que ce sont les seuls sous-ensembles de $\mathbb{R}$ ayant cette propriété.

Proposition 6.13 (intersection, union de fermés)
(1) Une intersection **quelconque** *de fermés de $\mathbb{R}$ est encore un fermé de $\mathbb{R}$;*
(2) Une union **finie** *de fermés de $\mathbb{R}$ est encore un fermé de $\mathbb{R}$.*

Preuve. (1) Soient I un ensemble non vide et pour tout $i \in I$, F_i un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}$. Il faut montrer que $\bigcap_{i \in I} F_i$ est encore un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}$: on a

$$\mathbb{R} \setminus \bigcap_{i \in I} F_i = \bigcup_{i \in I} (\mathbb{R} \setminus F_i).$$

Or F_i étant fermé, $\mathbb{R} \setminus F_i$ est ouvert pour tout $i \in I$. Le complémentaire de l'intersection des F_i est une unions d'ouverts donc est ouvert. En conclusion, l'intersection $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}$.
(2) On procède de même qu'en (1) en montrant que le complémentaire d'une union finie de fermés est une intersection finie d'ouverts.$\square$
Remarque. Attention : une union quelconque de fermés n'est pas nécessairement fermée. Considérons par exemple $F_n = [-1 + 1/n, 1 - 1/n]$, $n \geq 1$. Alors

$$\bigcup_{n \geq 1} F_n = \bigcup_{n \geq 1} [-1 + 1/n, 1 - 1/n] =]-1, 1[,$$

qui est un ensemble ouvert et non fermé.

Critère séquentiel pour les fermés

Proposition 6.14 (caractérisation séquentielle des fermés) *On considère un sous-ensemble F de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. F est une partie fermée de $\mathbb{R}$ si et seulement si pour toute suite u à valeurs dans F convergente,* $\lim_{n\to+\infty} u_n \in F$.

Preuve. 1. Montrons l'implication $\Longrightarrow$: on suppose F fermé et on considère une suite u convergente à valeurs dans F. On souhaite montrer que la limite l de u est dans F.

Par l'absurde, supposons que la limite l de u n'est pas dans F, c'est-à-dire est élément de $\mathbb{R} \setminus F$. Comme F est un ensemble fermé de $\mathbb{R}$, son complémentaire $\mathbb{R} \setminus F$ est ouvert dans $\mathbb{R}$ donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]l-\varepsilon, l+\varepsilon[\subset \mathbb{R} \setminus F$.

De plus, comme u tend vers l quand n tend vers l'infini, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n - l| < \varepsilon$, soit $u_n \in]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$. En particulier, $u_N \in]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$ donc $u_N \in \mathbb{R} \setminus F$, ce qui est absurde puisqu'on a supposé que tous les éléments de la suite u étaient dans F.

2. Réciproquement, montrons l'implication $\Longleftarrow$: on suppose que pour toute suite u à valeurs dans F qui converge vers un certain l, on a $l \in F$. On souhaite montrer que F est fermé dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que $\mathbb{R} \setminus F$ est ouvert dans $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus F$. Supposons par l'absurde que pour tout $\varepsilon > 0$, $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ n'est pas inclus dans $\mathbb{R} \setminus F$. En particulier, pour $\varepsilon = 1/n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $u_n \in]x - 1/n, x + 1/n[\cap F$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$x - \frac{1}{n} < u_n < x + \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad u_n \in F.$$

Par le théorème des trois suites, u converge vers x et est à valeurs dans F donc $x \in F$, ce qui est absurde.□

Exemple. Toute suite à valeurs entières convergente est stationnaire. En effet, $\mathbb{Z}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}$ donc toute suite u convergente à valeurs dans $\mathbb{Z}$ converge vers un élément k de $\mathbb{Z}$. En particulier, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n - k| < 1$ et puisque u_n et k sont entiers, cela implique que pour tout $n \geq N$, $u_n = k$.

Voisinages

Définition 6.15 (voisinages) *On considère un sous-ensemble V de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels ainsi qu'un réel x. V est dit* voisinage *de x s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que* $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset V$.

Exemples. L'intervalle $[0, 2]$ est voisinage de 1 car en prenant $\varepsilon = 1$, $]1-1, 1+1[\subset [0, 2]$. En revanche, $[0, 2]$ n'est pas un voisinage de 0 car il n'y a aucun $\varepsilon > 0$ tel que $]-\varepsilon, \varepsilon[$ soit inclus dans $[0, 2]$.

Remarque. Un sous-ensemble est ouvert si et seulement s'il est voisinage de chacun de ses points.

Intérieur et adhérence

Intérieur, utilisation des voisinages

Définition 6.16 (intérieur) *On considère un sous-ensemble A de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. Il existe un unique sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}$ inclus dans A et qui est le plus grand sous-ensemble de A ouvert au sens de l'inclusion. On l'appelle* intérieur *de A et on le note $\overset{\circ}{A}$.*

Preuve. On considère l'union de tous les ouverts de $\mathbb{R}$ inclus dans A, c'est-à-dire

$$U = \bigcup_{O \text{ ouvert } \subset A} O.$$

U est une partie ouverte de $\mathbb{R}$ comme union d'ouverts et U est contenue dans A. Il reste à remarquer que si O est un ouvert inclus dans A, alors $O \subset U$, c'est-à-dire que U est le plus grand ouvert au sens de l'inclusion qui est inclus dans A.□

Exemple 1. Si O est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}$, son intérieur est O lui-même.

Exemple 2. Pour tous $a < b$, l'intérieur de $[a, b]$ (ou $[a, b[$ ou $]a, b]$ ou $]a, b[$) est l'intervalle $]a, b[$. En effet, $]a, b[$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}$ et tout sous-ensemble plus grand strictement et contenu dans $[a, b]$ n'est pas ouvert.

Proposition 6.17 *Pour toute partie A de $\mathbb{R}$ et tout $x \in A$, on a*

$$x \in \overset{\circ}{A} \iff \exists \varepsilon > 0,]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset A.$$

Preuve. On considère l'ensemble

$$O = \{x \in A; \exists \varepsilon > 0 \text{ tel que }]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset A\}. \tag{6.2}$$

Montrons que O est un ouvert inclus dans A, puis que O est le plus grand ouvert inclus dans A. On en déduira alors que $O = \overset{\circ}{A}$.

Soit $x \in O$ et $\varepsilon > 0$ tel que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset A$. Alors si $y \in]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$, soit $\eta = \min(y - (x - \varepsilon), (x + \varepsilon) - y) > 0$. En particulier, on a

$$]y - \eta, y + \eta[\subset]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset A.$$

Ceci implique que $y \in O$ donc on vient de montrer que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset O$. Ceci étant vrai pour tout $x \in O$, on obtient que O est une partie ouverte de $\mathbb{R}$.

Pour montrer que O est le plus grand ouvert inclus dans A, on considère une autre partie O' ouverte incluse dans A. Il faut montrer que $O' \subset O$: soit $x \in O'$. Comme O' est ouvert, soit $\varepsilon > 0$ tel que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset O'$. Puisque $O' \subset A$, on a aussi $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset A$. Par définition de O, cela implique que $x \in O$ et ceci étant vrai pour tout $x \in O'$, on obtient que $O' \subset O$.□

Proposition 6.18 (intérieur et voisinages) *On considère un sous-ensemble A de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. L'intérieur de A est l'ensemble des éléments x de A tels que A est un voisinage de x.*

Preuve. Le résultat est une conséquence directe de la proposition précédente en remarquant que A est un voisinage de $x \in A$ si et seulement s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset A$.$\square$
Exemple. L'intérieur de $\mathbb{Z}$ est l'ensemble vide. En effet, si $k \in \mathbb{Z}$, il n'existe aucun $\varepsilon > 0$ vérifiant que $]k-\varepsilon, k+\varepsilon[$ est inclus dans $\mathbb{Z}$, ce qui implique que $\mathbb{Z}$ n'est pas voisinage de k.

Adhérence, utilisation du critère séquentiel

Définition 6.19 (adhérence) *On considère un sous-ensemble A de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. Il existe un unique sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}$ contenant A et qui est le plus petit ensemble fermé contenant A au sens de l'inclusion. On l'appelle* adhérence *de A et on le note $\overline{A}$.*

Preuve. On considère
$$G = \bigcap_{F \text{ fermé } \supset A} F.$$
Alors G est une partie fermée de $\mathbb{R}$ comme intersection de fermés et G contient A. Pour tout F fermé contenant A, on a $F \supset G$ donc G est le plus petit fermé contenant A.$\square$
Exemple 1. L'adhérence d'une partie fermée F de $\mathbb{R}$ est F elle-même.
Exemple 2. Pour tous $a < b$, l'adhérence de $]a, b[$ (ou $[a, b[$ ou $]a, b]$ ou $[a, b]$) est l'intervalle $[a, b]$. En effet, $[a, b]$ est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}$ et tout sous-ensemble plus petit strictement et contenant $]a, b[$ n'est pas fermé.

Proposition 6.20 *Pour toute partie A de $\mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a*
$$x \in \overline{A} \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0,]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap A \neq \emptyset.$$

Preuve. On considère l'ensemble
$$F = \{x \in \mathbb{R}; \forall \varepsilon > 0,]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap A \neq \emptyset\}.$$
Montrons que F est un fermé contenant A, puis que F est le plus petit fermé contenant A. On obtiendra alors que $F = \overline{A}$.

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans F convergeant vers un certain $x \in \mathbb{R}$. D'après le critère séquentiel pour la caractérisation des fermés, il suffit de montrer que $x \in F$ pour obtenir que F est fermé : on considère $\varepsilon > 0$. Comme u tend vers x, soit $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n - x| < \varepsilon/2$. En particulier, u_N est un élément de F donc $]u_N - \varepsilon/2, u_N + \varepsilon/2[\cap A \neq \emptyset$, c'est-à-dire qu'il existe $a \in A$ tel que $|u_N - a| < \varepsilon/2$. On en déduit alors que
$$|x-a| \leq |u_N - x| + |u_N - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{ et } a \in A.$$
Par conséquent, on a $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap A \neq \emptyset$ et ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, $x \in F$ donc F est fermé.

Il reste à montrer que F est le plus petit fermé au sens de l'inclusion contenant A. En effet, considérons un autre fermé F' contenant A et prouvons que $F \subset F'$. Soit $x \in F$, c'est-à-dire pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un élément de A dans $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$. En particulier, pour $\varepsilon = 1/n$,

$n \in \mathbb{N}^*$, il existe $u_n \in A$ tel que $|u_n - x| < 1/n$. Par théorème des trois suites, la suite u converge vers x. En outre, elle est à valeurs dans A donc aussi dans F' et puisque F' est fermé , on en déduit que la limite x de u est élément de F'. En conclusion, $F \subset F'$.□

Exemple. Si A est une partie non vide majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$, alors $\sup(A)$ (resp. $\inf(A)$) est un élément de $\overline{A}$.

Proposition 6.21 (critère séquentiel pour l'adhérence) *On considère un sous-ensemble A de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. L'adhérence de A est l'ensemble des limites de suites convergentes à valeurs dans A.*

Preuve. Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\exists (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ tel que } u_n \in A \ \ \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } \lim_{n\to+\infty} u_n = x \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0,]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap A \neq \emptyset.$$

En effet, montrons l'implication $\Longrightarrow$: soit u une suite d'éléments de A convergeant vers x. Alors pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap A$ pour tout $n \geq N$, c'est-à-dire que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap A \neq \emptyset$.

Réciproquement, montrons l'implication $\Longleftarrow$: soit $x \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un élément de A appartenant à $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$. En particulier, pour $\varepsilon = 1/n$, $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $u_n \in A$ tel que $x - 1/n < u_n < x + 1/n$. D'après le théorème de comparaison des trois suites, cela implique que la suite u tend vers x.

Le résultat de la proposition se déduit directement de l'équivalence que l'on vient de montrer et de la proposition précédente.□

Proposition 6.22 (relation entre adhérence et intérieur) *Pour toute partie A de $\mathbb{R}$, on a*

$$\mathbb{R} \setminus \overset{\circ}{A} = \overline{\mathbb{R} \setminus A}.$$

Preuve. $\mathbb{R}\setminus\overset{\circ}{A}$ est un fermé contenant $\mathbb{R}\setminus A$ et si F est un autre fermé contenant $\mathbb{R}\setminus A$, alors $\mathbb{R}\setminus F$ est un ouvert contenu dans A, donc $\mathbb{R} \setminus F \subset \overset{\circ}{A}$. En conclusion, en repassant au complémentaire, on a $F \supset \mathbb{R}\setminus\overset{\circ}{A}$, c'est-à-dire que $\mathbb{R}\setminus\overset{\circ}{A}$ est bien le plus petit fermé contenant $\mathbb{R}\setminus A$, soit l'adhérence de $\mathbb{R} \setminus A$.□

Densité

Définition 6.23 (densité d'une partie de $\mathbb{R}$) *On considère un sous-ensemble D de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. On dit que D est une partie* dense *dans $\mathbb{R}$ si $\overline{D} = \mathbb{R}$.*

Théorème 6.24 $\mathbb{Q}$ *est une partie dense dans* $\mathbb{R}$.

Preuve. D'après la proposition 6.20, il suffit de montrer que si $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$ sont fixés, alors $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap\mathbb{Q} \neq \emptyset$.

En effet, en prenant $n = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1$, on a $(n-1) \leq 1/\varepsilon < n$, soit

$$0 < \frac{1}{n} < \varepsilon \leq \frac{1}{n-1}.$$

De plus, en prenant $k = E(nx) + 1$, on a $(k-1) \leq nx < k$ et donc

$$\frac{k-1}{n} \leq x < \frac{k-1}{n} + \frac{1}{n} < x + \varepsilon.$$

Autrement dit, $\frac{k}{n}$ est un élément de $\mathbb{Q}$ qui est contenu dans l'intervalle $]x, x+\varepsilon[$. En conclusion, $\mathbb{Q}$ est bien dense dans $\mathbb{R}$.□

Exemples. On peut aussi montrer que les ensembles $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $\{\sqrt{2}r ; r \in \mathbb{Q}\}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

Compacité

Définition 6.25 (compacts de $\mathbb{R}$) *Soit K un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On dit que K est une* partie compacte *de $\mathbb{R}$ si elle est fermée et bornée.*

Exemple. Tout segment de la forme $[a, b]$, $a \leq b$, est une partie compacte de $\mathbb{R}$.

Théorème 6.26 *Soit K un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. K est une partie compacte de $\mathbb{R}$ si et seulement si toute suite à valeurs dans K possède une valeur d'adhérence dans K.*

Preuve. 1. Montrons que si K est compact, alors toute suite d'éléments de K possède une sous-suite convergente et ayant sa limite dans K. En effet, soit u telle que $u_n \in K$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors u est une suite bornée donc d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers $l \in \mathbb{R}$ et puisque K est une partie fermée de $\mathbb{R}$, on obtient que $l \in K$.

2. Réciproquement, on suppose que toute suite à valeurs dans K possède une sous-suite convergente dont la limite est dans K et on souhaite montrer que K est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}$.

Pour montrer que K est fermé dans $\mathbb{R}$, on utilise le critère séquentiel de caractérisation des fermés. Soit u une suite d'éléments de K convergeant vers l. Il existe une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant dans K mais comme il s'agit d'une sous-suite d'une suite convergente, $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ tend aussi vers l. En conclusion, $l \in K$ et K est bien une partie fermée de $\mathbb{R}$.

Il reste à montrer que K est bornée. Par l'absurde, dans le cas contraire, K est par exemple non majoré, c'est-à-dire pour tout $A > 0$, il existe $x \in K$ tel que $x > A$. En particulier, pour $A = n$, $n \in \mathbb{N}$, il existe $u_n \in K$ tel que $u_n > n$. La suite u tend alors vers $+\infty$ donc il en est de même pour toutes ses sous-suites. Par conséquent, u ne peut avoir de sous-suite convergeant dans K, ce qui est absurde.□